# **Νέα Μοντέλα για Πρωτόκολλα Πληθυσμών**

Όθων Σ. Μιχαήλ

Διπλωματούχος Μηχανικός Η/Υ & Πληροφορικής 2007
M.Sc. Επιστήμη & Τεχνολογία Υπολογιστών 2009

Διδακτορική Διατριβή

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής

Πανεπιστήμιο Πατρών

Επιτροπή:

Καθηγητής Παύλος Γ. Σπυράκης, Επιβλέπων, Μέλος Τριμελούς Επιτροπής
Καθηγητής Χρήστος Κακλαμάνης, Μέλος Τριμελούς Επιτροπής
Επίκουρος Καθηγητής Σωτήρης Νικολετσέας, Μέλος Τριμελούς Επιτροπής
Καθηγητής Χρήστος Ζαρολιάγκης
Καθηγητής Ελευθέριος Κυρούσης
Καθηγητής Αθανάσιος Τσακαλίδης
Λέκτορας Ιωάννης Καραγιάννης

Ιούνιος 2010

Η διδακτορική διατριβή του Όθωνα Σ. Μιχαήλ εγκρίνεται.

Επιβλέπων Ημερομηνία

Ημερομηνία

Ημερομηνία

Ημερομηνία

Ημερομηνία

Ημερομηνία

Ημερομηνία

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

Σεπτέμβριος 2010

Νέα Μοντέλα για Πρωτόκολλα Πληθυσμών



Όθων Σ. Μιχαήλ

# Περίληψη

Νέα Μοντέλα για Πρωτόκολλα Πληθυσμών

Όθων Σ. Μιχαήλ

Διδακτορική Διατριβή

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

Καθηγητής Παύλος Γ. Σπυράκης, Επιβλέπων

Τα Ασύρματα Δίκτυα Αισθητήρων αποτελούν μία αρκετά πρόσφατη και πολλά υποσχόμενη νέα τεχνολογία που βρίσκει πληθώρα εφαρμογών. Λόγω της ευρύτατης εφαρμοσιμότητάς της και της προφανούς θέσης που βρίσκει στο σύγχρονο κατανεμημένο υπολογιστικό κόσμο, η επιστημονική τυπική θεμελίωση των νόμων που διέπουν αυτή τη νέα τεχνολογία καθίσταται απαραίτητη. Έτσι, έχουν προταθεί πολλά νέα υπολογιστικά μοντέλα για Ασύρματα Δίκτυα Αισθητήρων.

Μία ειδική κατηγορία τέτοιων συστημάτων είναι τα *Πρωτόκολλα Πληθυσμών*. Αυτά διέπονται από τρία ιδαίτερα χαρακτηριστικά: Οι κόμβοι αίσθησης (*πράκτορες*) κινούνται *παθητικά*, δηλαδή δε μπορούν να ελέγξουν την κίνηση στην οποία υπόκεινται, η διαθέσιμη μνήμη κάθε κόμβου είναι πολύ περιορισμένη (ανεξάρτητη του μεγέθους του δικτύου) και οι πράκτορες αλληλεπιδρούν κατά ζεύγη. Τα χαρακτηριστικά αυτά όπως θα δούμε καθιστούν τη μελέτη αυτών των συστημάτων μη τετριμμένη διαδικασία. Είναι ήδη γνωστό ότι τα Πρωτόκολλα Πληθυσμών δε μπορούν να υπολογίσουν πολλά πράγματα. Συγκεκριμένα, έχει αποδειχθεί ότι ένα κατηγόρημα είναι υπολογίσιμο από το μοντέλο των Πρωτοκόλλων Πληθυσμών εάν και μόνο εάν είναι *ημιγραμμικό*. Η κλάση των ημιγραμμικών κατηγορημάτων δεν περιλαμβάνει πολλαπλασιασμούς μεταβλητών και ύψωση σε δύναμη, πρόκειται δηλαδή για μία αρκετά μικρή κλάση. Επίσης, γνωρίζουμε ότι τα

Πρωτόκολλα Πληθυσμών μπορούν να ανεχτούν μόνο $\mathcal{O}(1)$ συντριπτικές βλάβες και ούτε ένα Βυζαντινό πράκτορα.

Στην παρούσα εργασία, βασικός μας στόχος είναι η επέκταση του μοντέλου των πρωτοκόλλων πληθυσμών με νέες φυσικές και υλοποιήσιμες παραδοχές με σκοπό το κέρδος σε υπολογιστική ισχύ. Ο λόγος που αυτό γίνεται εφικτό, είναι ότι το μοντέλο των Πρωτοκόλλων Πληθυσμών σχεδιάστηκε μινιμαλιστικά πράγμα που το καθιστά επιδεκτικό σε βελτιώσεις. Πρώτα κάνουμε την παραδοχή ότι, πέρα των κόμβων αίσθησης, και οι ακμές του γραφήματος μπορούν να διατηρούν καταστάσεις εφοδιάζοντάς τες με εξίσου περιορισμένες μνήμες. Οι πράκτορες που αλληλεπιδρούν διαβάζουν αυτές τις καταστάσεις και τις ανανεώνουν ανανεώνοντας παράλληλα και τις δικές τους καταστάσεις. Παρατηρεί κανείς ότι σε ένα πλήρες γράφημα $n$ κόμβων είναι σα να έχουμε προσθέσει $\mathcal{O}(n^2)$ επιπλέον θέσεις μνήμης οι οποίες διαβάζονται και γράφονται μόνο από τα άκρα της αντίστοιχης ακμής. Αποδεικνύουμε ότι στο νέο μοντέλο, το οποίο καλούμε μοντέλο *Πρωτοκόλλων Πληθυσμών με Διαμεσολαβητή*, η υπολογιστική ισχύς αυξάνεται δραματικά. Όχι μόνο υπερβαίνουμε την κλάση των ημιγραμμικών κατηγορημάτων, αλλά επιπλέον δείχνουμε ότι κάθε τέτοιο κατανεμημένο σύστημα μπορεί να λειτουργήσει ως μία κατανεμημένη ανταιτιοκρατική μηχανή Turing που χρησιμοποιεί όλη τη διαθέσιμη μνήμη. Η μόνη διαφορά από μία συνήθη μηχανή Turing είναι ότι, λόγω του ότι οι πράκτορες δεν έχουν μοναδικούς προσδιοριστές και ότι επικεντρωνόμαστε σε πλήρη γραφήματα επικοινωνίας, η συγκεκριμένη μηχανή υπολογίζει μόνο συμμετρικές γλώσσες, δηλαδή γλώσσες που για κάθε συμβολοσειρά που περιλαμβάνουν περιλαμβάνουν και όλες τις αντιμεταθέσεις της. Πιο τυπικά, δείχνουμε ότι ένα κατηγόρημα είναι υπολογίσιμο από το νέο μοντέλο εάν και μόνο εάν είναι συμμετρικό και ανήκει στην $NSPACE(n^2)$. Επιπλέον, μελετάμε και τη δυνατότητα του νέου μοντέλου να διαγιγνώσκει γλώσσες γραφημάτων (για γενικά γραφήματα), δηλαδή να απαντάει αν το γράφημα στο οποίο εκτελείται ανήκει ή όχι σε κάποια γλώσσα.

Εν συνεχεία, αγνοούμε τις καταστάσεις των ακμών και δίνουμε μία νέα βελτίωση και πάλι απευθείας απ' το μοντέλο των Πρωτοκόλλων Πληθυσμών. Η υπόθεση που κάνουμε τώρα είναι ότι οι πράκτορες δεν έχουν τόσο περιορισμένη μνήμη ώστε να μοντελοποιούνται μόνο από πεπερασμένα αυτόματα. Εξάλλου, αυτό είναι κάτι που υπαγορεύεται άμεσα από τη σύγχρονη τεχνολογία, όπου σχεδόν κάθε κατανεμημένη συσκευή είναι κάποιο είδος υπολογιστή. Υποθέτουμε επομένως ότι οι πράκτορες είναι πολυταινιακές μηχανές Turing, που μπορούν τόσο να εκτελούν εσωτερικό υπολογισμό όσο και να αλληλεπιδρούν με άλλους πράκτορες (πάντα ανά δύο) ανταλλάσσοντας μηνύματα. Επίσης, αντί να χρησιμοποιούμε κάποιο συγκεκριμένο χωρικό φράγμα (μέγεθος μνήμης) υποθέτουμε ότι κάθε πρωτόκολλο έχει διαθέσιμη όση μνήμη επιθυμεί και είναι στην ευχέρειά του πόση απ' αυτή θα χρησιμοποιήσει. Καλούμε το νέο αυτό μοντέλο, μοντέλο *Παθητικά κινούμενων Μηχανών*. Αποδεικνύουμε ότι και αυτό το μοντέλο είναι απροσδόκητα ισχυρό ακόμα και για σχετικά μικρά χωρικά φράγματα. Συγκεκριμένα, αποδεικνύουμε ότι αν χρησιμοποιείται σε κάθε πράκτορα μνήμη το πολύ $f(n)$ για $f(n) = \Omega(\log n)$ τότε ένα κατηγόρημα είναι υπολογίσιμο από το νέο μοντέλο εάν και μόνο εάν είναι συμμετρικό και ανήκει στην $NSPACE(nf(n))$. Δείχνουμε επίσης ότι αυτό δεν ισχύει για $f(n) = o(\log n)$· η κλάση εκεί είναι αυστηρά μικρότερη απ' την $NSPACE(nf(n))$. Βασιζόμενοι σε αυτά, δείχνουμε ότι για $f(n) = \Omega(\log n)$ υπάρχει μία χωρική ιεραρχία ακριβώς όπως και για τις συνήθεις (συμμετρικές) μηχανές Turing. Δηλαδή, αποδεικνύουμε ότι όταν τα πρωτόκολλα έχουν διαθέσιμο περισσότερο χώρο τότε μπορούν να υπολογίσουν νέα κατηγορήματα που δεν ήταν δυνατόν να υπολογιστούν πριν. Δείχνουμε επίσης ότι αυτό δεν ισχύει για $f(n) = o(\log \log n)$, καθώς στην τελευταία περίπτωση η αντίστοιχη κλάση καταρρέει μέσα στην κλάση των ημιγραμμικών κατηγορημάτων, και τέλος ότι για $f(n) = \Omega(\log \log n)$ η κλάση γίνεται αυστηρά μεγαλύτερη των ημιγραμμικών κατηγορημάτων. Αφήνουμε ανοικτό το πρόβλημα του τι ακριβώς συμβαίνει για χωρικά φράγματα $f(n)$ τέτοια ώστε $f(n) = \Omega(\log\log n)$ και $f(n) = o(\log n)$ (δηλαδή μεταξύ $\log\log n$ και $\log n$).

Καθηγητής Παύλος Γ. Σπυράκης
Επιβλέπων Διατριβής

# Ευχαριστίες

Πολλοί άνθρωποι βοήθησαν, ο καθένας με τον τρόπο του και τη δική του συνεισφορά, στο να φτάσω μέχρι το τέλος αυτού του μεγάλου ταξιδιού με σταθμούς τις προπτυχιακές, μεταπτυχιακές και διδακτορικές μου σπουδές. Επίσης, καθώς οι μέρες που περνάει η χώρα μας την ώρα που γράφω αυτές τις λέξεις είναι δύσκολες - οφείλω να πω για πολλούς και μάλλον όχι γι' αυτούς που φέρουν την ευθύνη - δε μπορώ παρά να ευχαριστήσω και όσους με βοήθησαν να ανταπεξέλθω στις οικονομικές απαιτήσεις μίας τέτοια διαδρομής. Επομένως, πέρα απ' τους γονείς μου που επωμίστηκαν το κύριο βάρος, θα ήθελα να ευχαριστήσω το Ερευνητικό Ακαδημαϊκό Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών (ΕΑΙΤΥ) και το έργο FRONTS της Ευρωπαϊκής Ένωσης με αριθμό συμβολαίου ICT-2008-215270. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω το Τμήμα Μηχανικών Ηλεκτρονικών Υπολογιστών και Πληροφορικής του Πανεπιστημίου Πατρών, απ' το οποίο διδάχθηκα ό, τι γνωρίζω μέχρι τώρα για την Επιστήμη των Υπολογιστών, και φυσικά το Πανεπιστήμιο Πατρών.

Για τις προπτυχιακές μου σπουδές οφείλω να πω ότι τα λάθη, ευτυχώς, δεν πληρώθηκαν. Ίσως λάθη μίας νοοτροπίας που θέλει τους Έλληνες φοιτητές να πιστεύουν ότι ό, τι είχαν να πετύχουν το πέτυχαν με την είσοδό τους σε μία σχολή κι ότι από εκεί και έπειτα αρχίζει μία μακρά περίοδος διακοπών, ίσως λάθη του απόμακρου προσώπου και της ψυχρής πρώτης εντύπωσης που δίνει το Ελληνικό Πανεπιστήμιο, δε μπορώ να πω με σιγουριά. Σίγουρα όμως τη μεγαλύτερη ευθύνη την έχω εγώ ο ίδιος για τις προσωπικές μου επιλογές. Παρ' όλα αυτά, με τον ένα ή με τον άλλο τρόπο οι προπτυχιακές μου σπουδές ολοκληρώθηκαν στην ώρα τους. Θα ήθελα να ευχαριστήσω τους συμφοιτητές και φίλους μου Βαγγέλη, Θύμιο και Χρήστο και όσα άλλα παιδιά πέρασαν απ' την παρέα μας για όλες τις ξέγνοιαστες στιγμές που περάσαμε μαζί αυτά τα πέντε χρόνια, με τους καφέδες στη μαρίνα, τα ίσως υπερβολικά ξενύχτια μας κυρίως για ποτό και σπανίως για μελέτη, τα μπάνια το καλοκαίρι που η έννοια "εξεταστική" έχανε το νόημα της και όλες τις άλλες μοναδικές στιγμές που θα έχω για πάντα χαραγμένες στο μυαλό μου.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους πρώην συμμαθητές και μέχρι σήμερα φίλους μου στο Χαλάνδρι. Η απόσταση δε μας χώρισε ολότελα. Κάθε Χριστούγεννα, Πάσχα και καλοκαίρι είχαμε τη δυνατότητα να ιδωθούμε να κουβεντιάσουμε, να γλεντήσουμε και να θυμηθούμε τις παλιές μας ξέγνοιαστες μαθητικές στιγμές, οφείλω να πω κάθε φορά και με λίγο περισσότερο μυαλό μέσα στο κεφάλι μας. Ανδρόνικε, Βασίλη, Μιχάλη, Νίκο, Ντίνο, Χρήστο και όλα τα υπόλοιπα παιδιά σας ευχαριστώ μέσα από την καρδιά μου.

Και για την παρέα στο χωριό, την Αμάρυνθο Ευβοίας, ό, τι και να πω θα είναι λίγο... Μπάμπη, Αντώνη, Μιχάλη, Γιώργο Κηρύκο που είναι σα να μην έφυγες ποτέ από δίπλα μας και υπόλοιπα παιδιά ποτέ δε θα ξεχάσω τα πάρτι στην παραλία κάθε φορά που το ημερολόγιο έδειχνε 12 Αυγούστου, τα γλέντια μας και τους μεζέδες με ούζο και μπύρα. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω εξίσου και την πιο μεγάλη ηλικιακά παρέα, τον κ. Κώστα, την κ. Μαίρη και όλους τους υπόλοιπους. Οφείλω να πω ότι οι βραδιές που περάσαμε στον Τάσσο ήταν όλες μοναδικές. Είστε όλοι αναπόσπαστο κομμάτι της ζωής μου.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τον Δημήτρη και την Βέτα για τις ωραίες βραδιές που περάσαμε με πολύ γέλιο και συζήτηση. Ιδιαιτέρως, Δημήτρη, σε ευχαριστώ για εκείνο το ωραίο Φρέντο (ίσως το καλύτερο που έχω πιεί ποτέ μου) που συνόδεψε υπέροχα τη νίκη της Εθνικής στο μουντιάλ.

Για τους συνεργάτες μου Γιάννη Χατζηγιαννάκη, Σταύρο Νικολάου και Ανδρέα Παυλόγιαννη θα ήθελα να πω ότι η συνεργασία μας ήταν άψογη και ότι η πραγματοποίηση αυτής της διατριβής θα ήταν αδύνατη χωρίς και τη δική τους υπερπροσπάθεια. Γιάννη, σ' ευχαριστώ και για την παρότρυνσή σου να εμμείνω στο συγκεκριμένο ερευνητικό πεδίο. Για το συνεργάτη και δάσκαλο Καθηγητή κ. Παύλο Σπυράκη ό, τι και να πω θα είναι λίγο. Πρώτα απ' όλα θα ήθελα να τον ευχαριστήσω για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε αποδεχόμενος τη συνεργασία μας, όταν οι γνώσεις μου για τα θέματα με τα οποία έμελλε να ασχοληθώ ήταν ακόμα πολύ περιορισμένες. Πάντα θα θυμάμαι τις εποικοδομητικές συζητήσεις μας στο γραφείο του στον 4ο όροφο του ΕΑΙΤΥ με θέα τον Πατραϊκό κόλπο και τη γέφυρα. Συζητήσεις άλλοτε με ερευνητικό αντικείμενο και άλλοτε για ό, τι θέμα μας ερχόταν στο κεφάλι. Έχω να θυμάμαι την αστείρευτη υπομονή, το πηγαίο χιούμορ και το κοφτερό μυαλό αυτού του σπουδαίου επιστήμονα. Ευχαριστώ ακόμα θερμά τα άλλα δύο μέλη της τριμελούς επιτροπής τον Καθηγητή κ. Χρήστο Κακλαμάνη και τον Επίκουρο Καθηγητή κ. Σωτήρη Νικολετσέα καθώς και τα λοιπά μέλη της επταμελούς επιτροπής κ.κ. Καθηγητή Χρήστο Ζαρολιάγκη, Καθηγητή Ελευθέριο Κυρούση, Καθηγητή Αθανάσιο Τσακαλίδη και Λέκτορα Ιωάννη Καραγιάννη.

Πάνω απ' όλα θα ήθελα να ευχαριστήσω τους ανθρώπους που αποτελούν την οικογένειά μου. Τους γονείς μου Σπύρο και Ρούλα για τη ανατροφή που μου έδωσαν, για την ηθική και οικονομική συμπαράσταση και για το γεγονός ότι από τη μέρα που άρχισα να κατανοώ αυτόν τον κόσμο πείστηκα πως ό, τι και να συμβεί θα τους έχω δίπλα μου. Την δίδυμη αδερφή μου Ευαγγελία που μάταια προσπαθούμε όλα αυτά τα χρόνια να κατανοήσουμε αν ισχύει η τηλεπάθεια των διδύμων και την οποία αγαπώ πολύ και τον Σεζάρι τον μάγκα. Τον Σταύρο και την Ρίτα που με αποδέχτηκαν και θέλω να πιστεύω ότι με ένιωσαν δικό τους άνθρωπο. Φυσικά, δε μπορώ παρά να ευχαριστήσω με όλη μου την καρδιά το μοναδικό άνθρωπο που ένιωσε με τον χειρότερο τρόπο τι θα πει να έχεις έναν άνθρωπο μέσα στο σπίτι σου που μένει αμίλητος και σκεφτικός για ώρες ατελείωτες, σκυμμένος πάνω από αμέτρητα χαρτιά και βιβλία, καρφωμένος στον υπολογιστή, μονίμως με ένα στυλό στο χέρι και σκυθρωπός όταν τα πράγματα δεν πάνε όπως τα φανταζόταν. Επομένως, Βίκυ μου, πάνω απ' όλα θα ήθελα να σε ευχαριστήσω για την υπομονή σου· δε λέω ότι δεν την έχασες ορισμένες φορές, αλλά τι πιο φυσιολογικό από αυτό; Σε αγαπώ πολύ και είσαι ο σημαντικότερος λόγος που όλα αυτά έγιναν εφικτά!

*Στη Βίκυ για την αγάπη και την αμέριστη συμπαράστασή της, στον πατέρα μου Σπύρο, στη μητέρα μου Ρούλα και στην αδερφή μου Ευαγγελία. Είστε τα πάντα για μένα ...*

# Περιεχόμενα

# Κατάλογος Σχημάτων

# Κεφάλαιο 1

# Εισαγωγή

## 1.1 Παραδοσιακά Κατανεμημένα Συστήματα

Στα παραδοσιακά *κατανεμημένα συστήματα* η συνήθης υπόθεση είναι ότι κάθε πράκτορας του συστήματος, δηλαδή κάθε ανεξάρτητη υπολογιστική μονάδα (πιθανώς εφοδιασμένη με κάποιους αισθητήρες), είναι τόσο υπολογιστικά ισχυρή όσο και μία αιτιοκρατική μηχανή Turing. Επομένως, στα παραδοσιακά κατανεμημένα συστήματα φανταζόμαστε μία συλλογή αυτόνομων υπολογιστών (ισχυρών υπολογιστικών μονάδων) που μέσω κάποιας δικτύωσης μπορούν να επικοινωνούν μεταξύ τους (π.χ. μπορεί να ανταλλάσσουν μηνύματα μέσω καλωδίων).

Τα κατανεμημένα συστήματα χρησιμοποιούνται καθημερινά στο χώρο των επιχειρήσεων, της εκπαίδευσης, της δημόσιας διοίκησης αλλά ακόμα και στο σπίτι, ιδιαίτερα στις μέρες μας, όπου ο παγκόσμιος ιστός επιτρέπει την πρόσβαση σε δεδομένα ανεξαρτήτως της γεωγραφικής τους τοποθεσίας. Οι θεμελιώδεις δυσκολίες που πρέπει να αντιμετωπιστούν από ένα κατανεμημένο σύστημα σχετίζονται κυρίως με τους ακόλουθους παράγοντες:

- *Ασύγχρονη εκτέλεση διεργασιών*: το ετερογενές περιβάλλον εκτέλεσης των διεργασιών δεν επιτρέπει τον απόλυτο ή έστω και σχετικό εντοπισμό της χρονικής στιγμής εμφάνισης συγκεκριμένων καταστάσεων του συστήματος.

- *Περιορισμένη τοπική γνώση*: εφόσον κάθε υπολογιστική μονάδα είναι ενήμερη μόνο για τις πληροφορίες που μπορεί να προσπελάσει, διαθέτει μια σαφώς περιορισμένη οπτική εικόνα της συνολικής κατάστασης τους συστήματος.

- *Σφάλματα*: κάθε μια από τις υπολογιστικές μονάδες που αποτελούν το σύστημα μπορεί να αντιμετωπίσει κάποιο σφάλμα, θέτοντας ορισμένες μονάδες εκτός λειτουργίας.

Η *Θεωρία του Κατανεμημένου Υπολογισμού* έχει ως βασικό στόχο την επίτευξη ενός πλαισίου εργασίας για τα κατανεμημένα συστήματα μέσω του οποίου θα μπορέσουμε να εντοπίσουμε τα θεμελιώδη προβλήματα που εμφανίζονται στην πλειοψηφία των καταστάσεων που αντιμετωπίζουν τα κατανεμημένα συστήματα και να επιχειρήσουμε να τα ορίσουμε με σαφήνεια. Επομένως, μας δίνεται η δυνατότητα να σχεδιάσουμε και να αναλύσουμε την απόδοση αλγοριθμικών λύσεων για την επίλυση των προβλημάτων και να αποδείξουμε την ορθότητα και βέλτιστη λειτουργία τους. Με άλλα λόγια, επιχειρούμε να μοντελοποιήσουμε σε ένα αφαιρετικό θεωρητικό πλαίσιο τα συστήματα αυτά, έτσι ώστε να μπορέσουμε να καταλήξουμε σε ορισμένα καθολικά και αποδεδειγμένα συμπεράσματα σχετικά με την εγγενή πολυπλοκότητά τους και τις υπολογιστικές τους δυνατότητες, κατά τρόπο ανάλογο με αυτόν που ακολουθήθηκε (και συνεχίζει να ακολουθείται μέχρι και σήμερα) για τους συμβατικούς υπολογιστές.

## 1.2 Δίκτυα Αισθητήρων

Η σύγχρονη πρόοδος στην τεχνολογία των μικρο-ελεκτρο-μηχανικών συστημάτων (MEMS), των ασύρματων επικοινωνιών και της ψηφιακής ηλεκτρονικής έχει καταστήσει δυνατή την ανάπτυξη *κόμβων αίσθησης* χαμηλού κόστους (λιγότερο από 1$ Ηνωμένων

Πολιτειών ανά τεμάχιο), χαμηλής κατανάλωσης ενέργειας που μπορούν να επιτελούν πολλές λειτουργίες. Οι αισθητήρες αυτοί έχουν πολύ μικρό μέγεθος (π.χ. στόχος του προγράμματος SmartDust [56] ήταν το μέγεθος αυτό να μην ξεπερνάει τα λίγα τετραγωνικά χιλιοστά) και έχουν δυνατότητες τοπικής ασύρματης επικοινωνίας. Αυτοί οι τόσο μικροί κόμβοι αίσθησης έχουν κάνει εφικτή τη δημιουργία *δικτύων αισθητήρων* τα οποία βασίζουν τη λειτουργικότητά τους στην συνεργασία ενός μεγάλου αριθμού τέτοιων κόμβων.

Ένας κόμβος αίσθησης αποτελείται από πέντε κύριες συνιστώσες:

- Έναν *ελεγκτή* (κεντρική μονάδα επεξεργασίας του κόμβου) για να επεξεργάζεται όλα τα σχετικά δεδομένα και να μπορεί να εκτελεί κώδικά.
- Κάποια *μνήμη* για να αποθηκεύει προγράμματα και ενδιάμεσα δεδομένα· συνήθως, διαφορετικοί τύποι μνήμης χρησιμοποιούνται για τα προγράμματα και τα δεδομένα.
- *Αισθητήρες* και *μηχανισμούς κίνησης* που αποτελούν τα μέσα αλληλεπίδρασης του κόμβου με τον έξω κόσμο: είναι συσκευές που παρατηρούν ή ελέγχουν φυσικές παραμέτρους του περιβάλλοντος.
- Κάποιο μηχανισμό *επικοινωνίας*: η δικτύωση των κόμβων απαιτεί την ενσωμάτωση σε αυτούς κάποιας συσκευής που να έχει τη δυνατότητα αποστολής και λήψης πληροφορίας μέσω ενός ασύρματου καναλιού.
- *Παροχή ισχύος*: Συνήθως, οι κόμβοι δεν έχουν κάποια σταθερή παροχή ισχύος (σε ορισμένες εφαρμογές μπορεί να είναι δυνατή η ύπαρξη ηλιακών κυψελών ή άλλων μηχανισμών περιορισμένης άντλησης ενέργειας από το περιβάλλον) και ως εκ τούτου είναι απαραίτητη η ύπαρξη κάποιου τύπου ενσωματωμένης μπαταρίας για την παροχή ενέργειας στον κόμβο.

Η γενική ιδέα είναι ότι ένας μεγάλος αριθμός κόμβων αίσθησης τοποθετείται σε κάποιο περιβάλλον (π.χ. δάσος, ποτάμι, κτίριο κ.ο.κ.) για να παρατηρεί ορισμένες παραμέτρους του περιβάλλοντος. Οι κόμβοι χρησιμοποιούν τους αισθητήρες και τους μηχανισμούς κίνησης τους οποίους διαθέτουν για να αλληλεπιδρούν με το περιβάλλον και επικοινωνούν μεταξύ τους και με κάποιο σταθμό βάσης ο οποίος συλλέγει τα δεδομένα των παρατηρήσεων και των υπολογισμών του συστήματος (δικτύου). Για παράδειγμα, μπορούμε να φανταστούμε τη ρίψη μεγάλου πλήθους αισθητήρων, από αέρος, σε ένα δάσος με σκοπό την δημιουργία ενός δικτύου που θα αναλάβει να σημαίνει συναγερμό εάν ανιχνευτεί πυρκαγιά στο δάσος.

Επομένως, ένα δίκτυο αισθητήρων μπορούμε να πούμε ότι αποτελείται από ένα μεγάλο αριθμό κόμβων αίσθησης οι οποίοι παρατάσσονται είτε εντός του φαινομένου (π.χ. εντός ενός εργοστασίου με διαρροή ραδιενέργειας) είτε πολύ κοντά σε αυτό. Η ακριβής θέση των κόμβων δεν οφείλει απαραίτητα να είναι προσχεδιασμένη. Αυτό επιτρέπει την τυχαία διασπορά σε μη προσβάσιμες περιοχές ή περιοχές που έχουν πληγεί από κάποια καταστροφή. Από την άλλη μεριά, αυτό σημαίνει επίσης ότι τα πρωτόκολλα και οι αλγόριθμοι που σχεδιάζονται για δίκτυα αισθητήρων θα πρέπει να διαθέτουν ικανότητες αυτο-οργάνωσης. Ένα άλλο μοναδικό χαρακτηριστικό των δικτύων αισθητήρων είναι η συνεργατική τους λειτουργία. Καθώς οι κόμβοι είναι εφοδιασμένοι με επεξεργαστικές μονάδες, αντί να αποστέλλουν όλα τα δεδομένα στο σταθμό βάσης για επεξεργασία, αναλαμβάνουν με κατανεμημένο τρόπο να εκτελούν απλούς υπολογισμούς (συνεργατικά) και αποστέλλουν μόνο τα απαραίτητα και τα μερικώς επεξεργασμένα δεδομένα στη βάση.

Τα δίκτυα αισθητήρων βρίσκουν πληθώρα εφαρμογών. Κάποιες από αυτές είναι η υγεία, η διευκόλυνση της καθημερινής ζωής των ανθρώπων (π.χ. έξυπνα κτίρια), η εξοικονόμηση ενέργειας, οι στρατιωτικές επιχειρήσεις και η ασφάλεια. Ως ένα παράδειγμα αξίζει να αναφέρουμε την ιδέα των έξυπνων κτιρίων. Είναι γεγονός ότι τα σύγχρονα κτίρια σπαταλούν τεράστιες ποσότητες ενέργειας λόγω μη αποδοτικής κατασκευής ως προς την υγρασία, τον εξαερισμό και τον κλιματισμό. Ένα δίκτυο αισθητήρων μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να ελέγχει όλες αυτές τις παραμέτρους και να τις ρυθμίζει ανάλογα με τις ανάγκες. Υπολογίζεται ότι με τη χρήση τέτοιων συστημάτων θα εξοικονομηθούν μόνο στις ΗΠΑ δύο τετράκις εκατομμύρια θερμικές μονάδες. Στην ουσία, τα δίκτυα αισθητήρων είναι σε θέση να παρέχουν στον τελικό χρήστη επιπρόσθετη ευφυία και καλύτερη κατανόηση του εκάστοτε περιβάλλοντος. Το όραμα είναι ότι στο μέλλον τα Ασύρματα Δίκτυα Αισθητήρων (ΑΔΑ) θα αποτελούν ένα αναπόσπαστο κομμάτι της καθημερινής ζωής των ανθρώπων, ίσως σε μεγαλύτερο βαθμό απ' ότι οι σημερινοί συμβατικοί υπολογιστές.

Η πραγματοποίηση τέτοιων εφαρμογών απαιτεί τη χρήση ασύρματων τεχνικών ad hoc δικτύωσης. Παρότι πληθώρα πρωτοκόλλων και αλγορίθμων έχει προταθεί για τα παραδοσιακά ασύρματα ad hoc δίκτυα, αυτά δεν ικανοποιούν τα μοναδικά χαρακτηριστικά και τις απαιτήσεις των εφαρμογών των δικτύων αισθητήρων. Οι βασικές διαφορές των δύο τεχνολογιών είναι οι εξής:

- Το πλήθος των κόμβων σε ένα δίκτυο αισθητήρων είναι αρκετές τάξεις μεγέθους μεγαλύτερο.
- Οι κόμβοι αίσθησης παρατάσσονται σε πυκνή διάταξη.
- Οι κόμβοι αίσθησης είναι επιρρεπείς σε σφάλματα και βλάβες.
- Η τοπολογία ενός δικτύου αισθητήρων μεταβάλλεται πολύ συχνά.
- Οι κόμβοι αίσθησης έχουν πολύ περιορισμένη ενέργεια, μνήμη και υπολογιστικές δυνατότητες.
- Οι κόμβοι αίσθησης μπορεί να μην έχουν μοναδικούς προσδιοριστές λόγω του μεγάλου τους πλήθους (σε περιπτώσεις όπου η διαθέσιμη μνήμη τους είναι πολύ περιορισμένη).

## 1.3 Πρωτόκολλα Πληθυσμών

### 1.3.1 Εισαγωγή

Συνήθως, τα δίκτυα αισθητήρων αποτελούνται από μαζικές ποσότητες φτηνών κόμβων αίσθησης (τους οποίους θα καλούμε *πράκτορες*) και οι πόροι που είναι διαθέσιμοι σε κάθε κόμβο είναι ως επί το πλείστον εξαιρετικά περιορισμένοι. Τέτοιοι περιορισμοί μπορούν να ξεπεραστούν εάν ο σχεδιαστής του συστήματος μπορεί να ελέγξει τον τρόπο με τον οποίο συμβαίνουν οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των πρακτόρων. Σε αυτή την περίπτωση, ακόμα και πράκτορες πεπερασμένων καταστάσεων μπορούν να οργανωθούν σε κυψελοειδή αυτόματα [55] με υπολογιστική ισχύ ισοδύναμη με γραμμικού χώρου μηχανές Turing. Όπως παρατήρησαν οι Angluin κ.λπ στην (εργασία) [7], εάν ο σχεδιαστής του συστήματος δε μπορεί να ελέγξει αυτές τις αλληλεπιδράσεις, τότε δεν είναι καθόλου σαφές ποια είναι τα υπολογιστικά όρια.

Θεωρήστε ένα ασύρματο δίκτυο αισθητήρων στο οποίο οι κόμβοι αίσθησης κινούνται σύμφωνα με κάποιο *πρότυπο κίνησης* το οποίο δε μπορούν να ελέγξουν. Αυτό το είδος κίνησης είναι γνωστό ως *παθητική κίνηση* [7]. Φανταστείτε, για παράδειγμα, ότι εκατομμύρια τέτοιοι κόμβοι ρίχνονται σε ένα τυφώνα για να μελετήσουν συνεργατικά τα διάφορα χαρακτηριστικά του. Ορισμένες ενδιαφέρουσες μετρικές (χωρίς να προσποιούμαστε γνώση του θέματος) θα μπορούσαν να είναι η μέση ή μέγιστη βαρομετρική πίεση, η υψηλότερη θερμοκρασία, ή κάποια συγκεντρωτικά δεδομένα σχετικά με την ταχύτητα του ανέμου κοντά στο μάτι του κυκλώνα. Σε αυτό το σενάριο η κίνηση των κόμβων αίσθησης ακολουθεί κάποια συλλογή εναλλασσόμενων κατανομών πιθανότητας, οι οποίες, ως αποτέλεσμα ενός φυσικού φαινομένου, είναι εν γένει απολύτως απρόβλεπτες (οποιοδήποτε άλλο φυσικό φαινόμενο που παρέχει αφθονία κινητικής ενέργειας θα ήταν αντιπροσωπευτικό). Οι πράκτορες πρέπει να αισθανθούν το περιβάλλον τους ανάλογα με την επερώτηση του χρήστη και εν συνεχεία να αλληλεπιδράσουν με τον υπόλοιπο *πληθυσμό* πρακτόρων ούτως ώστε να πάρουν μία συλλογική απόφαση ή να υπολογίσουν συνεργατικά κάποια ζητούμενη συνάρτηση πάνω στις εισόδους των αισθητήρων.

Μία αλληλεπίδραση μεταξύ δύο πρακτόρων λαμβάνει χώρα όταν οι πράκτορες έρχονται επαρκώς κοντά ο ένας με τον άλλον έτσι ώστε η επικοινωνία να καθίσταται εφικτή (ο ένας θα πρέπει να εισέλθει στην εμβέλεια του άλλου). Η συνήθης υπόθεση (την οποία ακολουθούμε σε όλη την παρούσα εργασία) είναι ότι η επικοινωνία είναι *διπλής κατεύθυνσης* παρότι διάφοροι τύποι επικοινωνίας έχουν μελετηθεί στη σχετική βιβλιογραφία [11, 12]. Επιπρόσθετα, υποθέτουμε ότι οι πράκτορες επικοινωνούν κατά διατεταγμένα ζεύγη $(u, v)$, όπου ο $u$ παίζει το ρόλο του *μυητή* και ο $v$ του *αποκρινόμενου*. Οι διακριτοί ρόλοι των δύο συμμετεχόντων αποτελεί μία θεμελειώδη υπόθεση ρήξης της συμμετρίας.

### 1.3.2 Τυπικός Ορισμός του Μοντέλου

Τυπικά, ένα *Πρωτόκολλο Πληθυσμών* (ΠΠ) [7] είναι μία 6-άδα $(X, Y, Q, I, O, \delta)$, όπου τα $X$, $Y$ και $Q$ είναι όλα πεπερασμένα σύνολα και

1. $X$ είναι το *αλφάβητο εισόδου*,
2. $Y$ είναι το *αλφάβητο εξόδου*,
3. $Q$ είναι το σύνολο *καταστάσεων*,
4. $I : X \rightarrow Q$ είναι η *συνάρτηση εισόδου*,
5. $O : Q \rightarrow Y$ είναι η *συνάρτηση εξόδου* και
6. $\delta : Q \times Q \rightarrow Q \times Q$ είναι η *συνάρτηση μεταβάσεων*.

Εάν $\delta(a, b) = (a', b')$ τότε το $(a, b) \rightarrow (a', b')$ καλείται *μετάβαση* και ορίζονται οι $\delta_1(a, b) = a'$ και $\delta_2(a, b) = b'$.

Μία απλούστευση που διευκολύνει τη θεωρητική μελέτη είναι ότι οι πράκτορες αισθάνονται ταυτόχρονα το περιβάλλον τους αποκρινόμενοι σε κάποιο καθολικό σήμα εκκίνησης και κάθε ένας λαμβάνει ένα σύμβολο εισόδου από το $X$. Για παράδειγμα, το $X$ θα μπορούσε να περιλαμβάνει όλες τις πιθανές βαρομετρικές πιέσεις που μπορούν να εντοπίσουν οι αισθητήρες των πρακτόρων. Εν συνεχεία, όλοι οι πράκτορες εφαρμόζουν ταυτόχρονα τη συνάρτηση εισόδου $I$ στα σύμβολα εισόδου τους ούτως ώστε να διαμορφώσουν την αρχική τους κατάσταση. Με αυτή τη διαδικασία διαμορφώνεται η αρχική *φάση* [1] του συστήματος. Γενικότερα, δοθέντος ενός πληθυσμού $V$, μία φάση (πληθυσμού) είναι μία απεικόνιση $C : V \to Q$ που αναθέτει μία κατάσταση σε κάθε πράκτορα του πληθυσμού.

Ένα πολύ κρίσιμο σημείο είναι ότι κάθε επιτρεπτή αλληλεπίδραση μεταξύ των πρακτόρων μπορεί να είναι η επόμενη που θα συμβεί. Αυτό ακριβώς το γεγονός ερμηνεύεται ως μια εγγενής ανταιτιοκρατία του συστήματος. Τυπικά, οι πράκτορες είναι οργανωμένοι σε ένα *γράφημα επικοινωνίας* $G = (V, E)$, όπου το $V$ είναι ένας πληθυσμός $n \equiv |V|$ πρακτόρων και το $E$ περιγράφει τις επιτρεπτές αλληλεπιδράσεις. Δεν επιτρέπονται όλα τα γραφήματα επικοινωνίας στα περισσότερα πρακτικά σενάρια. Για παράδειγμα, εάν δεν υπάρχουν καθόλου εμπόδια, τότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι το γράφημα επικοινωνίας είναι πάντα πλήρες, η οποία είναι και η περίπτωση που μελετάται πιο συχνά. Στο άλλο άκρο, θα μπορούσαμε ακόμα να έχουμε θεωρήσει μόνο γραφήματα γραμμές ή και πιο σύνθετες συλλογές περιορισμένων γραφημάτων. Αυτή ακριβώς η προεπιλογή των πιθανών γραφημάτων επικοινωνίας συλλαμβάνεται από την έννοια των συμπάντων γραφημάτων. Ένα *σύμπαν γραφημάτων* (ή *οικογένεια γραφημάτων*) $\mathcal{U}$ είναι οποιοδήποτε σύνολο γραφημάτων επικοινωνίας. Εκτός κι αν αναφέρεται διαφορετικά, υποθέτουμε ότι τα υπό θεώρηση σύμπαντα γραφημάτων αποτελούνται από κατευθυντά γραφήματα επικοινωνίας χωρίς βρόχους και πολλαπλές ακμές. Συμβολίζουμε με $\mathcal{G}_{all}$ το σύμπαν

[1] Στην εργασία αυτή ως επί το πλείστον, σε ό, τι αφορά τους όρους της Θεωρίας Υπολογισμού και της Υπολογιστικής Πολυπλοκότητας, ακολουθούμε την ορολογία που ο Γεωργακόπουλος εισήγαγε στο (βιβλίο) [36] μεταφράζοντας το [52] του Sipser.

γραφημάτων που αποτελείται από όλα τα πιθανά γραφήματα επικοινωνίας οποιουδήποτε πεπερασμένου αριθμού κόμβων μεγαλύτερου ή ίσου του 2 (δεν επιτρέπουμε το κενό γράφημα, το γράφημα με ένα μόνο κόμβο, ούτε άπειρα γραφήματα) και με $\mathcal{G}_{con}$ το υποσύνολο του $\mathcal{G}_{all}$ που περιλαμβάνει μόνο τα ασθενώς συνεκτικά γραφήματά του. Δοθέντος ενός σύμπαντος γραφημάτων $\mathcal{U}$, ένα ΠΠ τρέχει στους κόμβους κάποιου $G \in \mathcal{U}$.

Έστω οι φάσεις πληθυσμού $C$ και $C'$, και έστω ότι $u$ και $\upsilon$ είναι δύο διακριτοί πράκτορες. Λέμε ότι η $C$ *πηγαίνει στη* $C'$ *μέσω της συνάντησης* $e = (u, \upsilon)$ και συμβολίζουμε με $C \xrightarrow{e} C'$, εάν

$$
\begin{aligned}
C'(u) &= \delta_1(C(u), C(\upsilon)),\\
C'(\upsilon) &= \delta_2(C(u), C(\upsilon)), \text{ και}\\
C'(w) &= C(w), \text{ για κάθε } w \in V - \{u, \upsilon\}.
\end{aligned}
$$

Λέμε ότι η $C$ *μπορεί να πάει στη* $C'$ *σε ένα βήμα* (ή *παράγει* τη $C'$) και συμβολίζουμε με $C \to C'$, αν $C \xrightarrow{e} C'$ για κάποια συνάντηση $e \in E$. Δηλαδή, η $C$ μπορεί να πάει στη $C'$ σε ένα βήμα, αν υπάρχει συνάντηση μέσω της οποίας η $C$ πηγαίνει στη $C'$. Έχοντας ορίσει την δυαδική σχέση ''μπορεί να πάει σε ένα βήμα στη'' επί του συνόλου των φάσεων πληθυσμού, μπορούμε πολύ εύκολα να ορίσουμε την ''μπορεί να πάει στη'' (σε ένα ή περισσότερα βήματα) ως την μεταβατική της θήκη. Τυπικά, γράφουμε $C \xrightarrow{*} C'$, αν υπάρχει μία ακολουθία φάσεων $C = C_0, C_1, \ldots, C_t = C'$, τέτοια ώστε $C_i \to C_{i+1}$ για κάθε $i$, όπου $0 \leq i < t$, και στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η $C'$ είναι *προσβάσιμη* απ' τη $C$ (ή η $C$ ''φτάνει τη'' $C'$).

Οι Angluin κ.λπ στην [7] μοντελοποίησαν την παθητική κίνηση μέσω ενός εχθρικού δρομολογητή που αποτελεί ένα μαύρο κουτί για το πρωτόκολλο και ο οποίος απλώς επιλέγει στοιχεία του $E$ για να αλληλεπιδράσουν σύμφωνα με τη συνάρτηση μεταβάσεων $\delta$ (όλοι οι πράκτορες εφαρμόζουν την ίδια καθολική συνάρτηση μεταβάσεων). Ο μοναδικός, αλλά αναγκαίος, περιορισμός που επιβάλλεται στον εχθρικό δρομολογητή είναι ότι οφείλει να είναι *δίκαιος* έτσι ώστε να μη διαχωρίζει τον πληθυσμό σε μη επικοινωνούσες ομάδες και, όπως έξυπνα παρατηρούν οι Aspnes και Ruppert στην [12], να αποτραπεί η πιθανότητα οι πράκτορες να επικοινωνούν πάντα σε ''μη βολικές'' (για την εξέλιξη του υπολογισμού) χρονικές στιγμές.

Μία *εκτέλεση* είναι μια πεπερασμένη ή άπειρη ακολουθία φάσεων $C_0, C_1, C_2, \ldots$ τέτοια ώστε για κάθε $i \geq 0$, $C_i \to C_{i+1}$. Μία άπειρη εκτέλεση είναι *δίκαιη*, εάν για κάθε ζεύγος διαμορφώσεων πληθυσμού $C$ και $C'$, τέτοιων ώστε $C \to C'$, αν η $C$ εμφανίζεται άπειρο αριθμό φορών στην εκτέλεση τότε το ίδιο ισχύει και για τη $C'$. Ένας *υπολογισμός* ορίζεται ως μια άπειρη δίκαιη εκτέλεση.

Το *γράφημα μεταβάσεων* $T(\mathcal{A}, G)$ ενός πρωτοκόλλου $\mathcal{A}$ που εκτελείται σε ένα γράφημα επικοινωνίας $G$ (ή απλώς $T$ όταν είναι σαφές ποια είναι τα $\mathcal{A}$ και $G$) είναι ένα κατευθυντό γράφημα του οποίου οι κόμβοι είναι όλες οι πιθανές φάσεις και του οποίου οι ακμές είναι όλες οι πιθανές μεταβάσεις μεταξύ των φάσεων. Μία ισχυρά συνεκτική συνιστώσα ενός κατευθυντού γραφήματος λέγεται *τελική* αν και μόνο αν (ανν) καμία ακμή που ξεκινάει από κάποιο κόμβο της συνιστώσας δεν οδηγεί σε κόμβο εκτός αυτής.

**Θεώρημα 1.** *Έστω $\Xi = C_0, C_1, \ldots$ μία άπειρη εκτέλεση του $\mathcal{A}$ στο $G$, $\mathcal{F}_\Xi$ το σύνολο των φάσεων που εμφανίζονται άπειρο αριθμό φορών στην $\Xi$ και $T_{\mathcal{F}_\Xi}$ το επαγόμενο υπογράφημα του $T(\mathcal{A}, G)$ από το $\mathcal{F}_\Xi$. Η $\Xi$ είναι ένας υπολογισμός (δηλαδή είναι επιπρόσθετα δίκαιη) ανν το $T_{\mathcal{F}_\Xi}$ είναι μία τελική ισχυρά συνεκτική συνιστώσα του $T(\mathcal{A}, G)$.*

*Απόδειξη.* Το ''μόνο εάν'' μέρος αποδείχτηκε στην [7]. Αποδεικνύουμε εδώ το ''εάν'' μέρος. Έστω ότι το $T_{\mathcal{F}_\Xi}$ είναι μία τελική ισχυρά συνεκτική συνιστώσα του $T(\mathcal{A}, G)$ και ότι η $\Xi$ δεν είναι δίκαιη (δηλαδή ότι δεν ισχύει η δήλωση του ''εάν'' μέρους). Τότε υπάρχει κάποια φάση $C \in \mathcal{F}_\Xi$ και μία $C' \notin \mathcal{F}_\Xi$ τέτοιες ώστε (τ.ώ.) $C \to C'$. Όμως αυτό αντιβαίνει στο γεγονός ότι η $T_{\mathcal{F}_\Xi}$ είναι τελική. $\square$

### 1.3.3 Σταθερός Υπολογισμός

Σε αυτά τα συστήματα οι υπολογισμοί εξ' ορισμού δεν τερματίζουν. Στην πραγματικότητα, ο ίδιος ο ορισμός του υπολογισμού εμπεριέχει την εγγενή αδυναμία αυτών των συστημάτων να ανιχνεύσουν τον τερματισμό, το οποίο οφείλεται κυρίως στις ιδιότητες *ομοιομορφίας* και *ανωνυμίας* των πρωτοκόλλων πληθυσμών. Η ομοιομορφία απαιτεί οι περιγραφές των πρωτοκόλλων να είναι ανεξάρτητες του $n$ και η ανωνυμία απαιτεί το σύνολο των καταστάσεων να είναι επαρκώς μικρό ούτως ώστε να μην υπάρχει αρκετός χώρος στις καταστάσεις των πρακτόρων για *μοναδικούς προσδιοριστές* (ταυτότητες). Αντ' αυτού οι υπολογισμοί απαιτείται να σταθεροποιούνται σε κάποια σωστή κοινή ή κατανεμημένη τιμή. Οι Angluin κ.λπ χρησιμοποίησαν *συναρτήσεις πάνω σε αναθέσεις εισόδου* ούτως ώστε να τυποποιήσουν τις *προδιαγραφές* των πρωτοκόλλων. Για παράδειγμα, μία φυσική ερώτηση στο παράδειγμα με τον τυφώνα θα μπορούσε να είναι εάν τουλάχιστον πέντε πράκτορες παρατήρησαν βαρομετρική πίεση μεγαλύτερη από κάποια σταθερά $c$ (η οποία πιθανόν διαχωρίζει τις πιέσεις σε χαμηλές και αυξημένες). Αυτό που πραγματικά περιμένουμε από ένα πρωτόκολλο που λύνει αυτό το πρόβλημα είναι πάντα να *σταθεροποιείται* (*συγκλίνει*) σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων στη σωστή απάντηση. Αφού μία τέτοια επερώτηση έχει δυαδικό σύνολο τιμών (απαντήσεων), γεγονός που την καθιστά *κατηγόρημα*, θέλουμε όλοι οι πράκτορες να δώσουν την έξοδο 1 όταν το κατηγόρημα είναι αληθές και την έξοδο 0 διαφορετικά, η οποία είναι μία σύμβαση που κάνουμε σχετικά με τον τρόπο με τον οποίο διαβάζουμε την έξοδο του πρωτοκόλλου. Αφού ο βασικός μας στόχος σε αυτή την εργασία είναι να μελετήσουμε την υπολογιστική ισχύ των υπό μελέτη μοντέλων, μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας (χ.β.τ.γ.) να επικεντρωθούμε αποκλειστικά και μόνο σε κατηγορήματα [12], παρότι στην [7] παρέχονται γενικοί ορισμοί για συναρτήσεις και προτείνονται πολλές ακόμα *συμβάσεις εξόδου*.

Τυπικά, η είσοδος (επίσης γνωστή και ως *ανάθεση εισόδου*) σε ένα ΠΠ $\mathcal{A}$ μπορεί να είναι κάθε $x \in X^*$, όπου $X^* = \{\sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_k \mid k \geq 0 \text{ και } \sigma_i \in X\}$. Στην πραγματικότητα, κάθε τέτοιο $x = \sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_n$ μπορεί να είναι η είσοδος για το $\mathcal{A}$ όταν αυτό τρέχει σε έναν πληθυσμό μεγέθους $n$. Αυτό γίνεται εφικτό υποθέτοντας μία αυθαίρετη διάταξη πάνω στο σύνολο των πρακτόρων η οποία δεν είναι γνωστή στους ίδιους τους πράκτορες. Για παράδειγμα θα μπορούσαμε να συμφωνήσουμε ότι $V = \{1, 2, \dots, n\}$ και ότι ο πράκτορας $i$, $1 \leq i \leq n$, παίρνει ως είσοδο (αισθάνεται) το σύμβολο $\sigma_i$ της $x$. Οι προδιαγραφές του πρωτοκόλλου $\mathcal{A}$ μπορεί να είναι οποιοδήποτε κατηγόρημα $p : X^* \to \{0, 1\}$ το οποίο μπορούμε να το θεωρήσουμε και ως την αντίστοιχη γλώσσα του, $L_p = \{x \in X^* \mid p(x) = 1\}$. Ομοίως κάθε $L \subseteq X^*$ αντιστοιχεί στο κατηγόρημα $p_L$ επί του $X^*$ το οποίο ορίζεται ως $p_L(x) = 1$ ανν $x \in L$.

Μία *ανάθεση εξόδου* είναι μία συνάρτηση $y : V \to Y$ που περιγράφει τις εξόδους ενός πρωτοκόλλου πληθυσμών. Έστω $\mathcal{Y} = Y^V$ το σύνολο όλων των αναθέσεων εξόδου και ομοίως $\mathcal{C} = Q^V$ το σύνολο όλων των φάσεων. Κάθε φάση $C$ αντιστοιχεί σε μία ανάθεση εξόδου $y_C$ που προκύπτει εφαρμόζοντας τη συνάρτηση εξόδου $O$ στην κατάσταση που έχει κάθε πράκτορας κατά τη φάση $C$. Συνεπώς, η $y_C$ είναι η σύνθετη συνάρτηση $O \circ C$, δηλαδή $y_C(u) = O(C(u))$, για κάθε $u \in V$. Επεκτείνουμε την $O$ σε μία απεικόνιση από φάσεις σε αναθέσεις εξόδου, $O : \mathcal{C} \to \mathcal{Y}$, γράφοντας $O(C) = y_C$. Επομένως, αν $q$ είναι η κατάσταση που έχει ο πράκτορας $u$ στη φάση $C$ (δηλαδή, $C(u) = q$), τότε το σύμβολο εξόδου του πράκτορα $u$ στην ανάθεση εξόδου $O(C)$ είναι $O(q)$.

Μία φάση $C$ θα καλείται *σταθερής εξόδου*, εάν $O(C') = O(C)$, για κάθε $C'$ που είναι προσβάσιμη απ' την $C$. Διαισθητικά, το να φτάσει ο υπολογισμός σε μία σταθερής εξόδου φάση $C$ σημαίνει ότι όποιο μονοπάτι φάσεων και να ακολουθήσει ο υπολογισμός από εκεί και έπειτα, οι φάσεις αυτές θα αντιστοιχούν πάντοτε στην ίδια ανάθεση εξόδου $O(C)$, δηλαδή η έξοδος κάθε πράκτορα θα παραμένει σε κάθε βήμα αμετάβλητη.

Ένα κατηγόρημα $p$ επί του $X^*$ λέγεται ότι είναι *σταθερά υπολογίσιμο* από το μοντέλο ΠΠ στο σύμπαν γραφημάτων $\mathcal{U}$, εάν υπάρχει ένα ΠΠ $\mathcal{A}$ τ.ώ. για κάθε ανάθεση εισόδου $x \in X^*$, κάθε υπολογισμός του $\mathcal{A}$, σε κάθε γράφημα επικοινωνίας από το

$\{G \in \mathcal{U} \mid |V(G)| = |x|\}$, που ξεκινά από την αρχική φάση που αντιστοιχεί στην $x$ φτάνει σε μία σταθερής εξόδου φάση στην οποία όλοι οι πράκτορες δίνουν ως έξοδο $p(x)$.

Η έρευνα αρχικά επικεντρώθηκε σε πλήρη γραφήματα επικοινωνίας. Αξίζει να παρατηρήσει κανείς ότι η πληρότητα του γραφήματος επικοινωνίας, σε συνδυασμό με το γεγονός ότι οι πράκτορες είναι πανομοιότυποι και δεν έχουν μοναδικούς προσδιοριστές, συνεπάγεται ότι τα σταθερά υπολογίσιμα κατηγορήματα πρέπει να είναι συμμετρικά. Γενικά, ένα κατηγόρημα $p$ είναι *συμμετρικό* αν για κάθε $x \in X^*$ και κάθε $x'$ που αποτελεί μία αντιμετάθεση των συμβόλων της $x$, ισχύει ότι $p(x) = p(x')$ (με λόγια, η αντιμετάθεση των συμβόλων εισόδου δεν επηρεάζει την τιμή του κατηγορήματος). Αποδεικνύουμε ένα Λήμμα που θα φανεί χρήσιμο στη συνέχεια.

**Λήμμα 1.** *Το κατηγόρημα $p$ είναι συμμετρικό ανν η αντίστοιχη γλώσσα $L_p$ είναι συμμετρική.*

*Απόδειξη.* Εάν το $p$ είναι συμμετρικό τότε καμία αντιμετάθεση δε λείπει από το στήριγμά του $p^{-1}(1)$. Όμως, $L_p = p^{-1}(1)$ (ακριβώς εκείνες οι συμβολοσειρές που καθιστούν το κατηγόρημα αληθές), συνεπώς η $L_p$ είναι συμμετρική. Εάν η $L_p$ είναι συμμετρική τότε το $p^{-1}(1)$ είναι και αυτό συμμετρικό και το ίδιο θα πρέπει να ισχύει και για το $p^{-1}(0)$, διαφορετικά ούτε το $p^{-1}(1)$ θα ήταν (κάποια αντιμετάθεση που λείπει από το $p^{-1}(0)$ θα ανήκε στο $p^{-1}(1)$). □

Λόγω της αντιστοιχίας που προκύπτει από το Λήμμα 1 χρησιμοποιούμε τον όρο ‘‘συμμετρικό’’ τόσο για κατηγορήματα όσο και για γλώσσες.

Στην [7] οι συγγραφείς, μεταξύ άλλων, εδραίωσαν ότι κάθε *ημιγραμμικό κατηγόρημα* ή, ισοδύναμα [34], κάθε κατηγόρημα που μπορεί να οριστεί μέσω λογικών τύπων πρώτης-τάξης της *Presburger αριθμητικής* [48], είναι σταθερά υπολογίσιμο από το μοντέλο ΠΠ. Επιλέον, στις [8, 11] αποδείχθηκε ότι αυτός ο εγκλεισμός ισχύει με ισότητα γεγονός που οδηγεί στον ακόλουθο ακριβή χαρακτηρισμό της κλάσης των υπολογίσιμων κατηγορημάτων σε πλήρη γραφήματα: *Ένα κατηγόρημα είναι σταθερά υπολογίσιμο από το μοντέλο ΠΠ ανν είναι ημιγραμμικό.*

Η κλάση των ημιγραμμικών κατηγορημάτων είναι μία σχετικά μικρή κλάση. Για παράδειγμα, δεν περιλαμβάνει γινόμενα μεταβλητών, ύψωση σε δύναμη καθώς και πολλές άλλες φυσικές πράξεις μεταβλητών εισόδου. Επιπρόσθετα, οι Delporte-Gallet κ.λπ [30] έδειξαν ότι τα πρωτόκολλα πληθυσμών μπορούν να ανεχτούν μόνο $\mathcal{O}(1)$ συντριπτικές βλάβες και ούτε ένα Βυζαντινό πράκτορα. Αυτές οι αδυναμίες ήταν αναπόφευκτες δεδομένου ότι το μοντέλο ΠΠ επίτηδες σχεδιάστηκε ούτως ώστε να είναι μινιμαλιστικό.

### 1.3.4 Σταθεροποιούμενες Είσοδοι

Μία ακόμα πιθανότητα είναι το να αφήσουμε τις εισόδους του πληθυσμού να αμφιταλαντεύονται (να μεταβάλουν την τιμή τους) και απλώς να απαιτήσουμε αυτή η συμπεριφορά να παύει μετά από πεπερασμένο αριθμό βημάτων. Αυτή είναι η παραλλαγή του μοντέλου ΠΠ με *σταθεροποιούμενες εισόδους* [5]. Εδώ υποθέτουμε ότι όλοι οι πράκτορες βρίσκονται αρχικά σε κάποια *αρχική κατάσταση* $q_0$ (δηλαδή, δεν ορίζεται συνάρτηση εισόδου) και η συνάρτηση μεταβάσεων είναι τώρα της μορφής

$$\delta : (Q \times X) \times (Q \times X) \to Q \times Q.$$

Κάθε πράκτορας είναι σα να έχει δύο συνιστώσες στην κατάστασή του, όπου η πρώτη είναι αυτή καθ' εαυτή η κατάσταση του πράκτορα από το σύνολο $Q$ και η δεύτερη παίζει το ρόλο μίας θύρας εισόδου τις οποίας το ληφθέν σύμβολο μπορεί να αλλάξει αυθαίρετα μεταξύ δύο αλληλεπιδράσεων αλλά *τελικά* [2] θα σταθεροποιηθεί. Εδώ, η συνάρτηση εξόδου εφαρμόζεται στις συνιστώσες καταστάσης των πρακτόρων. Στην [5] αποδείχθηκε ότι όλα τα ημιγραμμικά κατηγορήματα μπορούν να υπολογιστούν με σταθεροποιούμενες εισόδους, το οποίο, σε συνδυασμό με τον προαναφερθέντα ακριβή χαρακτηρισμό για τα

[2] Όποτε χρησιμοποιούμε τον όρο "τελικά" υπονοούμε "σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων".

πρωτόκολλα πληθυσμών, συνεπάγεται ότι *κάθε πρωτόκολλο πληθυσμών για σταθερές εισόδους μπορεί να προσαρμοστεί ούτως ώστε να δουλεύει με σταθεροποιούμενες εισόδους*. Επιπλέον, η [8] καθιέρωσε ότι τίποτα πλέον των ημιγραμμικών κατηγορημάτων δε μπορεί να υπολογιστεί από την παραλλαγή με σταθεροποιούμενες εισόδους.

### 1.3.5 Βελτιώνοντας το Μοντέλο

Η συνολική εργασία των Angluin κ.λπ έριξε φως και άνοιξε το δρόμο προς μία απολύτως νέα και πολλά υποσχόμενη κατεύθυνση. Η έλλειψη ελέγχου πάνω στο πρότυπο των αλληλεπιδράσεων, καθώς και η εγγενής ανταιτιοκρατία του, οδήγησαν στη δημιουργία μίας ποικιλίας νέων θεωρητικών μοντέλων για ΑΔΑ. Τα μοντέλα αυτά αντλούν το μεγαλύτερο μέρος της ομορφιάς τους ακριβώς από την αδυναμία τους να οργανώσουν τις αλληλεπιδράσεις με ένα βολικό και προαποφασισμένο τρόπο. Όπως είδαμε στις προηγούμενες ενότητες, το μοντέλο ΠΠ ήταν η μινιμαλιστική αφετηρία αυτού του πεδίου έρευνας. Οι περισσότερες προσπάθειες συγκεντρώνονται τώρα προς την κατεύθυνση της ενίσχυσης-βελτίωσης του μοντέλου των Angluin κ.λπ με επιπλέον ρεαλιστικές και υλοποιήσιμες παραδοχές, ούτως ώστε να αποκτήσει περισσότερη υπολογιστική ισχύ και/ή να επιταχυνθεί ο χρόνος σύγκλισης και/ή να βελτιωθεί η ανοχή σε βλάβες. Διάφορες υποσχόμενες προσπάθειες έχουν εμφανιστεί που κινούνται προς αυτή την κατεύθυνση. Σε κάθε περίπτωση, η βελτίωση του μοντέλου συνοδεύεται από μία λογική και υψίστης σημασίας ερώτηση: *Ποια είναι, επακριβώς, η κλάση των κατηγορημάτων που υπολογίζονται από το νέο μοντέλο*;

Μία ιδέα είναι να επιτρέψουμε κάποια ετερογένεια στο μοντέλο έτσι ώστε κάποιοι πράκτορες να διαθέτουν περισσότερη υπολογιστική ισχύ από τους υπόλοιπους. Παραδείγματος χάρη, θα μπορούσε ένας σταθμός βάσης να αποτελεί ένα επιπλέον μέρος του δικτύου με τον οποίο οι πράκτορες επιτρέπεται να επικοινωνούν [13].

Μία ακόμα επέκταση ήταν το μοντέλο των *Πρωτοκόλλων Κοινωνιών* (ΠΚ) των Guerraoui και Ruppert [39], στο οποίο οι πράκτορες έχουν εργοστασιακούς μοναδικούς προσδιοριστές οι οποίοι είναι μόνο για ανάγνωση και έχουν επιλεγεί από ένα άπειρο σύνολο μοναδικών προσδιοριστών. Επιπρόσθετα, κάθε πράκτορας μπορεί να αποθηκεύσει μέχρι κάποιο σταθερό αριθμό από μοναδικούς προσδιοριστές άλλων πρακτόρων. Στο μοντέλο αυτό, οι πράκτορες μπορούν μόνο να συγκρίνουν τους μοναδικούς προσδιοριστές, δηλαδή, καμία άλλη πράξη πάνω σε αυτούς δεν επιτρέπεται. Στην [39] αποδείχθηκε (δείτε επίσης την [12]) ότι το μοντέλο των πρωτοκόλλων κοινωνιών είναι εξαιρετικά ισχυρό: η αντίστοιχη κλάση, την οποία συμβολίζουμε ως $CP$, αποτελείται από όλα τα συμμετρικά κατηγορήματα που ανήκουν στην $NSPACE(n \log n)$. Η απόδειξη βασίζεται στην προσομοίωση μίας παραλλαγής της Ανταιτιοκρατικής *Μηχανής Μετατροπής Αποθήκευσης* του Schönhage [50, 51]. Επιπλέον, αποδείχθηκε ότι εάν οι μοναδικοί προσδιοριστές δε μπορούν να τροποποιηθούν λόγω βλαβών και εάν κάποιες ακόμα αναγκαίες συνθήκες ικανοποιούνται, τότε τα πρωτόκολλα κοινωνιών μπορούν να ανεχτούν $\mathcal{O}(1)$ Βυζαντινούς πράκτορες.

Στα επόμενα κεφάλαια θα παρουσιάσουμε τις βελτιώσεις του μοντέλου που προτείνουμε εμείς. Συγκεκριμένα, στα Κεφάλαιο 2 και 3 θα παρουσιάσουμε το μοντέλο των *Πρωτοκόλλων Πληθυσμών με Διαμεσολαβητή*. Το νέο μοντέλο και τα αποτελέσματα που το συνοδεύουν έχουν εμφανιστεί επίσης στις [45, 23, 18, 2, 24, 21, 27, 22, 26, 32, 35]. Στα Κεφάλαια 4 και 5 θα παρουσιάσουμε το μοντέλο των *Παθητικά κινούμενων Μηχανών*. Το μοντέλο αυτό καθώς και τα αποτελέσματα που το συνοδεύουν έχουν εμφανιστεί επίσης στις [20, 19, 2, 26, 32].

### 1.3.6 Λοιπές Προηγούμενες Εργασίες

Στις [6, 7], πέρα των όσων προαναφέρθηκαν, προτάθηκε και το *πιθανοτικό μοντέλο πρωτοκόλλων πληθυσμών* στο οποίο ο δρομολογητής επιλέγει τυχαία και ομοιόμορφα το επόμενο ζεύγος αλληλεπίδρασης. Ορισμένες εργασίες επικεντρώθηκαν στην (χρονική) απόδοση βασιζόμενες σε αυτή την υπόθεση τυχαίας δρομολόγησης (δείτε π.χ. την [9]). Η [17] πρότεινε ένα γενικό ορισμό πιθανοτικών δρομολογητών και μία συλλογή νέων δίκαιων δρομολογητών και αποκάλυψε την ανάγκη για *προσαρμοστικότητα* των πρωτοκόλλων όταν συμβαίνουν φυσικές τροποποιήσεις στο πρότυπο κίνησης. Στις [16, 28] οι συγγραφείς θεώρησαν μία υπόθεση τεράστιου πληθυσμού (πληθυσμού που τείνει στο άπειρο) και μελέτησαν τη δυναμική, τη σταθερότητα και την υπολογιστική ισχύ των πιθανοτικών πρωτοκόλλων πληθυσμών εκμεταλλευόμενοι τα εργαλεία και τις τεχνικές της Συνεχούς Μη Γραμμικής Δυναμικής. Αρκετές εργασίες επικεντρώθηκαν στις ανάγκες πρακτικών συστημάτων. Ορισμένες συμπεριέλαβαν βλάβες πρακτόρων [30]. Πρόσφατα, οι Bournez κ.λπ [15] εξέτασαν την πιθανότητα μελέτης των πρωτοκόλλων πληθυσμών μέσω προσεγγίσεων της Θεωρίας Παιγνίων. Τέλος, το *στατικό σύγχρονο πεδίο αισθητήρων* [3] είναι ένα πολλά υποσχόμενο γενικό μοντέλο που προτάθηκε πρόσφατα και το οποίο μοντελοποιεί δίκτυα μικρών ετερογενών συσκευών και επιπλέον επιτρέπει την επεξεργασία πάνω σε σταθερές ροές δεδομένων που πηγάζουν από το περιβάλλον. Το τελευταίο χαρακτηριστικό απουσιάζει πλήρως από τα μοντέλα που παρουσιάζονται στην παρούσα εργασία και απαιτείται από διάφορα προβλήματα αίσθησης. Πολύ πρόσφατα, μελετήθηκε και η σχέση μεταξύ του *στατικού σύγχρονου πεδίου αισθητήρων* και του μοντέλου *πρωτοκόλλων πληθυσμών με διαμεσολαβητή* μέσω προσομοιώσεων [4].

## 1.4 Συνεισφορά της Διατριβής

Η βασική συνεισφορά της παρούσας εργασίας είναι δύο νέα μοντέλα για τέτοιου είδους συστήματα. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, το πρώτο καλείται μοντέλο *Πρωτοκόλλων Πληθυσμών με Διαμεσολαβητή* (ΠΠΔ) και το δεύτερο μοντέλο *Παθητικά κινούμενων Μηχανών* (ΠΜ). Και τα δύο μοντέλα που προτείνουμε αποτελούν γενικεύσεις του μοντέλου των πρωτοκόλλων πληθυσμών. Ακολουθώντας τους Angluin κ.λπ εστιάζουμε κι εμείς στην υπολογιστική ισχύ των νέων μοντέλων.

Κάθε ένα από τα δύο μοντέλα έχει τη δική του ξεχωριστή αξία. Το μεν μοντέλο ΠΠΔ, παρότι λιγότερο ρεαλιστικό, αναδεικνύει σε όλο της το μεγαλείο τη συνεργατική ισχύ αυτών των συστημάτων. Εστιάζοντας σε πλήρη γραφήματα επικοινωνίας, αρχικά αποδεικνύουμε ότι το μοντέλο ΠΠΔ είναι υπολογιστικά ισχυρότερο από το μοντέλο ΠΠ. Για να το κάνουμε αυτό δείχνουμε ότι μπορεί να υπολογίσει ένα κατηγόρημα που περιλαμβάνει πολλαπλασιασμό μεταβλητών. Αυτή είναι και η πρώτη ένδειξη ότι η επιπλέον μνήμη που έχουμε εισαγάγει μεταξύ των πρακτόρων μπορεί ίσως να χρησιμοποιηθεί συστηματικά ούτως ώστε να επιτρέψει εύρυτερο υπολογισμό. Στη συνέχεια, δείχνουμε ότι οι πράκτορες μπορούν πράγματι να οργανωθούν σε ένα γραμμικό επικαλυπτικό γράφημα και να συμπεριφερθούν ως μία κατανεμημένη ανταιτιοκρατική μηχανή Turing (TM) που ασυμπτωτικά χρησιμοποιεί όλο τον διαθέσιμο χώρο. Αυτό είναι ένα καθαρά απροσδόκητο αποτέλεσμα. Αρχικά ανώνυμοι πράκτορες ξεκινώντας από μία πλήρως συμμετρική αρχική κατάσταση (λόγω της πληρότητας του γραφήματος) καταφέρνουν να διατάξουν τους εαυτούς τους και να εκμεταλλευτούν αυτή τη διάταξη ούτως ώστε να επισκέπτονται με συστηματικό τρόπο τις εξερχόμενες ακμές τους, όπως ακριβώς μία TM θα επισκεπτόταν τα $\mathcal{O}(n^2)$ διαθέσιμα κελιά της.

Το δε μοντέλο ΠΜ έχει μία εντελώς διαφορετική συνεισφορά. Κατά τη γνώμη μας αποτελεί το βασικό μοντέλο όλης αυτής της ερευνητικής περιοχής. Ο λόγος είναι ότι, όπως είδαμε, τα πρωτόκολλα πληθυσμών κατάφεραν να καλύψουν μόνο την περίπτωση κατά την οποία οι μνήμες των πρακτόρων είναι σταθερού μεγέθους, δηλαδή ανεξάρτητου του μεγέθους του πληθυσμού. Αντίθετα το μοντέλο ΠΜ δεν επιβάλει κανέναν περιορισμό ως προς τη διαθέσιμη μνήμη και επιπλέον θεωρεί ότι κάθε πράκτορας είναι μία πολυταινιακή TM με δυνατότητες επικοινωνίας. Με τον τρόπο αυτό επιτυγχάνεται διπλό κέρδος: το νέο μοντέλο ανταποκρίνεται καλύτερα στις δυνατότητες της σύγχρονης τεχνολογίας, όπου σχεδόν κάθε σύγχρονη δικτυακή συσκευή μπορεί να λειτουργήσει ως κάποιας μορφής υπολογιστής και επιπλέον μας δίνεται η δυνατότητα, ίσως για πρώτη φορά σε δίκτυα αισθητήρων, να μελετήσουμε την υπολογιστική ισχύ συναρτήσει της διαθέσιμης μνήμης. Το τελευταίο, πέραν του θεωρητικού ενδιαφέροντος, έχει και τεράστια πρακτική σημασία. Για κάθε κατανεμημένο σύστημα θα θέλαμε να γνωρίζουμε τι μπορεί να υπολογιστεί δεδομένης της διαθέσιμης μνήμης. Αν με μνήμη $x$ σε κάθε πράκτορα μπορούμε να υπολογίσουμε ό, τι βρίσκεται στην κλάση $A$, πάντα έχει αξία το ερώτημα του τι μπορεί να υπολογιστεί με μνήμη $x+\varepsilon$ (ή $x-\varepsilon$). Διευρύνεται η αντίστοιχη κλάση; Αν ναι, ποια είναι η σχέση μεταξύ της νέας κλάσης $B$ και της $A$; Αν όχι, τι χωρική αύξηση απαιτείται για να προκύψει ευρύτερη κλάση;

Καταφέρνουμε να δώσουμε ικανοποιητικές απαντήσεις στα περισσότερα από τα παραπάνω ερωτήματα. Συγκεκριμένα, δείχνουμε ότι για μνήμες αυστηρά μικρότερες του $\log\log n$ τα πάντα είναι ημιγραμμικά, ενώ για μνήμες τουλάχιστον $\log\log n$ αρχίζει ο υπολογισμός των πρώτων μη ημιγραμμικών κατηγορημάτων. Με άλλα λόγια, προκύπτει ότι το μοντέλο των πρωτοκόλλων πληθυσμών δεν εκφράζει μόνο σταθερές μνήμες, όπως γνωρίζαμε μέχρι σήμερα, αλλά ακόμα και μνήμες που έχουν κάποια μικρή εξάρτηση από το μέγεθος του πληθυσμού. Αν η μνήμη ξεπεράσει το $\log\log n$, η κλάση των υπολογίσιμων κατηγορημάτων διευρύνεται. Επιπλέον, δείχνουμε ότι για μνήμες $f(n)$ τουλάχιστον $\log n$, η κλάση είναι εξαιρετικά ευρεία: *είναι η κλάση των συμμετρικών γλωσσών της $NSPACE(nf(n))$*. Αυτό δίνει μία πλήρη εικόνα του τι συμβαίνει γι' αυτά τα χωρικά φράγματα: *όσο αυξάνεται η διαθέσιμη μνήμη τόσο περισσότερα πράγματα μπορούν να υπολογιστούν*, γεγονός που απαντάει καταφατικά στην αντίστοιχη ερώτηση ύπαρξης χωρικής ιεραρχίας που είναι θεμελιώδους σημασίας για κάθε υπολογιστικό σύστημα. Επιπλέον, δείχνουμε ότι για $f(n)$ αυστηρά μικρότερη του $\log n$, η κλάση γίνεται αυστηρά μικρότερη της κλάσης των συμμετρικών γλωσσών της $NSPACE(nf(n))$. Το αποτέλεσμα αυτό προσδίδει εξέχουσα σημασία στο φράγμα $\log n$: όχι μόνο αποτελεί μία απολύτως λογική χωρική απαίτηση, αλλά αποτελεί και το πρώτο χωρικό φράγμα στο οποίο ξεκινάει η υπολογιστική συμπεριφορά $NSPACE(nf(n))$, η οποία είναι και η καλύτερη που μπορούμε να περιμένουμε από αυτού του είδους τα συστήματα. Με απλά λόγια, δείχνουμε ότι το $\log n$ μοιάζει να αποτελεί τη χρυσή τομή μεταξύ κόστους σε μνήμη και υπολογιστικών δυνατοτήτων.

## 1.5 Οργάνωση της Διατριβής

Το Κεφάλαιο 2 ορίζει το μοντέλο ΠΠΔ και εμπεριέχει όλα τα αποτελέσματα που αφορούν στον σταθερό υπολογισμό κατηγορημάτων σε πλήρη γραφήματα επικοινωνίας. Συγκεκριμένα, πρώτα αποδεικνύεται ότι η κλάση των υπολογίσιμων κατηγορημάτων είναι ευρύτερη από αυτή των ημιγραμμικών κατηγορημάτων και εν συνεχεία παρουσιάζεται το βασικό αποτέλεσμα που δείχνει ότι η κλάση είναι ίση με την κλάση των συμμετρικών γλωσσών της $NSPACE(n^2)$. Στο τέλος του κεφαλαίου δίνεται και ο κώδικας της αντίστοιχης προσομοίωσης.

Το Κεφάλαιο 3 ασχολείται και αυτό με το μοντέλο ΠΠΔ αλλά από μία τελείως διαφορετική οπτική. Ο στόχος εδώ είναι η κατανόηση της δυνατότητας του μοντέλου να υπολογίζει ιδιότητες γραφημάτων. Το κεφάλαιο πρώτα εστιάζει σε ασθενώς συνεκτικά γραφήματα και παρέχει αποτελέσματα κλειστότητας, δείχνει την υπολογισιμότητα αρκετών ενδιαφέροντων ιδιοτήτων και δείχνει την αδυναμία υπολογισμού μίας συγκεκριμένης ιδιότητας από μία ειδική κατηγορία πρωτοκόλλων. Το υπόλοιπο του κεφαλαίου ασχολείται με την περίπτωση κατά την οποία τα γραφήματα επικοινωνίας μπορεί να είναι και μη συνεκτικά. Εδώ αποδεικνύεται ότι καμία ουσιαστική ιδιότητα δε μπορεί να υπολογιστεί.

Το Κεφάλαιο 4 ορίζει το μοντέλο ΠΜ και εστιάζει στον σταθερό υπολογισμό κατηγορημάτων σε πλήρη γραφήματα επικοινωνίας από πράκτορες των οποίων η μνήμη δεν υπερβαίνει σε μέγεθος το $\log n$. Αποδεικνύεται ότι η αντίστοιχη κλάση είναι ίση με τη συμμετρική υποκλάση της $NSPACE(n \log n)$, γεγονός που καθιστά το χωρικό αυτό φράγμα άκρως ικανοποιητικό. Η απόδειξη δείχνει πως οι πράκτορες μπορούν χρησιμοποιώντας την τεχνική της επανεκκίνησης του υπολογισμού να αναθέσουν μοναδικούς προσδιοριστές στους εαυτούς τους και να οργανωθούν έτσι σε μία κατανεμημένη TM. Παρατηρήστε ότι σε αυτό το χωρικό φράγμα (και σε όλα τα μεγαλύτερα από αυτό) υπάρχει ο απαιτούμενος χώρος για την ανάθεση μοναδικών προσδιοριστών.

Το Κεφάλαιο 5 μελετάει τις υπολογιστικές δυνατότητες του μοντέλου ΠΜ για τα διάφορα χωρικά φράγματα που μπορεί να επιβληθούν. Συγκεκριμένα, αποδεικνύεται ότι, για φράγματα τουλάχιστον $\log n$, όλες οι κλάσεις που προκύπτουν εμφανίζουν παρόμοια συμπεριφορά, αφού οι πράκτορες πάντα μπορούν να αποκτήσουν μοναδικούς προσδιοριστές και επομένως να οργανωθούν σε μία TM που χρησιμοποιεί όλο τον διαθέσιμο χώρο. Για φράγματα αυστηρά μικρότερα του $\log n$ αποδεικνύεται ότι η παραπάνω συμπεριφορά παύει. Για φράγματα αυστηρά μικρότερα του $\log \log n$ αποδεικνύεται ότι η κλάση είναι ακριβώς η κλάση των ημιγραμμικών κατηγορημάτων, ενώ για φράγματα τουλάχιστον $\log \log n$ αρχίζει ο υπολογισμός των πρώτων μη ημιγραμμικών κατηγορημάτων.

Τέλος, το Κεφάλαιο 6 παρουσιάζει τα συμπεράσματα της εργασίας καθώς και αρκετές υποσχόμενες ανοικτές ερευνητικές κατευθύνσεις.

# Κεφάλαιο 2

# Πρωτόκολλα Πληθυσμών με Διαμεσολαβητή

## 2.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό προτείνουμε μία επέκταση του μοντέλου των πρωτοκόλλων πληθυσμών η οποία μοιάζει να έχει ιδιαίτερο θεωρητικό ενδιαφέρον. Το βασικό επιπρόσθετο χαρακτηριστικό είναι ότι κάθε σύνδεσμος επικοινωνίας είναι και αυτός ένας πράκτορας πεπερασμένων καταστάσεων που μπορεί να επικοινωνεί μόνο με τους πράκτορες τους οποίους συνδέει. Συγκεκριμένα, όταν δύο οποιοιδήποτε πράκτορες $u$ και $v$ αλληλεπιδρούν μέσω της ακμής $e = (u, v)$, οι $u$ και $v$ διαβάζουν την κατάσταση της $e$ και τις δικιές τους καταστάσεις και τις ανανεώνουν όλες σύμφωνα, και πάλι, με κάποια καθολική συνάρτηση μεταβάσεων. Τώρα είναι σα να έχουμε καταστήσει κάθε ζεύγος πρακτόρων ικανό να αφήνει μικρά πακέτα πληροφορίας τα οποία θα έχει διαθέσιμα στις μελλοντικές αλληλεπιδράσεις του. Ένας άλλος τρόπος για να ερμηνεύσουμε ένα τέτοιο σύστημα είναι να θεωρήσουμε ότι οι πράκτορες μπορούν ανά ζεύγη να αποθηκεύουν πληροφορία σε κάποια καθολική αποθηκευτική μονάδα, όπως π.χ. ένα σταθμό βάσης, την οποία καλούμε *διαμε-*

*σολαβητή*. Ο διαμεσολαβητής παρέχει ένα μικρό τμήμα διαθέσιμου χώρου (ανεξάρτητο του μεγέθους του πληθυσμού) σε κάθε ζεύγος πρακτόρων. Κατά την αλληλεπίδρασή τους οι πράκτορες επικοινωνούν με το διαμεσολαβητή ούτως ώστε να ενημερωθούν για την κοινή τους πληροφορία και ανάλογα με το αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης ανανεώνουν την πληροφορία αυτή (επικοινωνώντας και πάλι με τον διαμεσολαβητή).

Θα μπορούσαν να ειπωθούν διάφορα ακόμα λογικά λειτουργικά σενάρια για το μοντέλο αυτό αλλά προτιμούμε να μην επιχειρήσουμε μία τέτοια διεξοδική συζήτηση. Κυρίως μας ενδιαφέρουν οι υπολογιστικές δυνατότητες του μοντέλου μας ανεξαρτήτως του πραγματικού σεναρίου στο οποίο ένα τέτοιο μοντέλο θα μπορούσε να βρει πρακτική εφαρμογή. Καλούμε το μοντέλο αυτό μοντέλο *Πρωτοκόλλων Πληθυσμών με Διαμεσολαβητή* (ΠΠΔ) σαφώς εμπνευσμένοι απ' την ιδέα του διαμεσολαβητή.

Η Ενότητα 2.2 παρέχει έναν τυπικό ορισμό του μοντέλου ΠΠΔ. Η Ενότητα 2.3 επικεντρώνεται στην υπολογιστική ισχύ του μοντέλου μελετώντας τι κατηγορήματα επί αναθέσεων εισόδου είναι σταθερά υπολογίσιμα στην *πλήρως συμμετρική περίπτωση*, στην οποία το γράφημα επικοινωνίας είναι πλήρες και όλες οι ακμές βρίσκονται αρχικά σε μία κοινή κατάσταση. Αρχικά η Ενότητα 2.3.1 αποδεικνύει ότι το μοντέλο ΠΠΔ είναι αυστηρά ισχυρότερο απ' το μοντέλο ΠΠ δείχνοντας ότι το πρώτο μπορεί να υπολογίσει σταθερά ένα μη ημιγραμμικό κατηγόρημα. Εν συνεχεία, στην Ενότητα 2.3.2 αποδεικνύεται ότι το μοντέλο ΠΠΔ μπορεί να μετατρέψει τον εαυτό του σε μία αιτιοκρατική TM γραμμικού χώρου. Η Ενότητα 2.3.3 αρχικά επεκτείνει τις τεχνικές που αναπτύχθηκαν στην Ενότητα 2.3.1 για να δείξει ότι το μοντέλο ΠΠΔ μπορεί να προσομοιώσει μία ανταιτιοκρατική TM χώρου $\mathcal{O}(n^2)$ και εν συνεχεία, δείχνοντας ότι ισχύει επίσης και ο αντίστροφος εγκλεισμός, καθιερώνει τον ακόλουθο ακριβή χαρακτηρισμό για την κλάση των υπολογίσιμων κατηγορημάτων από το μοντέλο ΠΠΔ: *είναι επακριβώς η κλάση των συμμετρικών κατηγορημάτων στην* $NSPACE(n^2)$. Επομένως, το μοντέλο ΠΠΔ όχι μόνο διατηρεί τις ιδιότητες της ομοιομορφίας και της ανωνυμίας αλλά επίσης αποδεικνύεται μία εξαιρετικά ισχυρή βελτίωση: επεκτείνει δραματικά την κλάση των υπολογίσιμων κατηγορημάτων από τα ημιγραμμικά κατηγορήματα σε όλα τα συμμετρικά κατηγορήματα που μπορούν να υπολογιστούν από κάποια ανταιτιοκρατική TM σε χωρό $\mathcal{O}(n^2)$.

## 2.2 Τυπικός Ορισμός του Μοντέλου

**Ορισμός 1.** *Ένα ΠΠΔ είναι μία 7-άδα $(X, Y, Q, S, I, O, \delta)$, όπου τα $X$, $Y$, $Q$ (το τελευταίο καλείται τώρα σύνολο* καταστάσεων πρακτόρων*), $I$ και $O$ ορίζονται όπως στο μοντέλο ΠΠ, το $S$ είναι ένα πεπερασμένο σύνολο* καταστάσεων ακμών *και η συνάρτηση μεταβάσεων είναι τώρα της μορφής $\delta : Q \times Q \times S \to Q \times Q \times S$. Εάν $\delta(a, b, c) = (a', b', c')$, τότε το $(a, b, c) \to (a', b', c')$ καλείται και πάλι μετάβαση και ορίζονται οι $\delta_1(a, b, c) = a'$, $\delta_2(a, b, c) = b'$ και $\delta_3(a, b, c) = c'$.*

Όπως πιθανόν να έχετε ήδη παρατηρήσει, δεν έχουμε ορίσει είσοδο στις ακμές. Υποθέτουμε ότι κάθε ακμή αρχικά βρίσκεται σε μία κατάσταση του $S$ σύμφωνα με κάποια *συνάρτηση αρχικοποίησης ακμών* $\iota : E \to S$, η οποία δεν αποτελεί μέρος του πρωτοκόλλου αλλά μοντελοποιεί κάποια προεπεξεργασία του δικτύου που έχει προηγηθεί της εκτέλεσης του πρωτοκόλλου.

Μία *φάση δικτύου*, ή απλά φάση, είναι μία απεικόνιση $C : V \cup E \to Q \cup S$ που καθορίζει την κατάσταση κάθε πράκτορα στον πληθυσμό και κάθε ακμής στο σύνολο των επιτρεπτών αλληλεπιδράσεων. Έστω οι φάσεις δικτύου $C$ και $C'$, και έστω ότι $u$ και $\upsilon$ είναι δύο διακριτοί πράκτορες. Λέμε ότι η $C$ πηγαίνει στη $C'$ μέσω της *συνάντησης* $e = (u, \upsilon)$ και συμβολίζουμε με $C \xrightarrow{e} C'$, εάν

$$\begin{aligned}
C'(u) &= \delta_1(C(u), C(\upsilon), C(e)),\\
C'(\upsilon) &= \delta_2(C(u), C(\upsilon), C(e)),\\
C'(e) &= \delta_3(C(u), C(\upsilon), C(e)) \text{ και}\\
C'(z) &= C(z), \text{ για κάθε } z \in (V - \{u, \upsilon\}) \cup (E - \{e\}).
\end{aligned}$$

Δεδομένου του παραπάνω ορισμού οι υπόλοιπες σχέσεις, οι εκτελέσεις και η δικαιοσύνη ορίζονται όπως και στο μοντέλο ΠΠ.

Καλούμε μία αλληλεπίδραση *αποτελεσματική* εάν τροποποιεί την κατάσταση τουλάχιστον ενός απ' τους αλληλεπιδρώντες πράκτορες ή της μεταξύ τους ακμής. Δηλαδή, αν $C$ και $C'$ είναι οι φάσεις πριν και μετά την αλληλεπίδραση, αντίστοιχα, τότε $C' \neq C$. Ομοίως, η μετάβαση $(a, b, c) \to (a', b', c')$ καλείται αποτελεσματική εάν $a' \neq a$ ή $b' \neq b$ ή $c' \neq c$.

Αξίζει να παρατηρήσει κανείς ότι το μοντέλο ΠΠΔ *διατηρεί τόσο την ιδιότητα της ομοιομορφίας όσο και αυτή της ανωνυμίας*. Ως εκ τούτου, ο κώδικας κάθε πρωτοκόλλου ΠΠΔ είναι σταθερού μεγέθους, επομένως μπορεί να αποθηκευτεί σε κάθε συσκευή του δικτύου και επιπρόσθετα δεν υπάρχει κι εδώ χώρος στις καταστάσεις των πρακτόρων και των ακμών για να αποθηκευτούν μοναδικοί προσδιοριστές. Ωστόσο, όπως θα δούμε, το μοντέλο ΠΠΔ μπορεί να διεκπεραιώσει πολύ πιο σύνθετους υπολογισμούς απ' ό, τι το μοντέλο ΠΠ.

### 2.2.1 Σταθερός Υπολογισμός

Όπως και τα πρωτόκολλα πληθυσμών έτσι και τα πρωτόκολλα πληθυσμών με διαμεσολαβητή δεν τερματίζουν αλλά απαιτούμε να σταθεροποιούνται. Ο σταθερός υπολογισμός ορίζεται όμοια με πριν.

**Ορισμός 2.** *Λέμε ότι ένα κατηγόρημα $p$ επί του $X^*$ είναι* σταθερά υπολογίσιμο *από το μοντέλο ΠΠΔ σε ένα σύμπαν γραφημάτων $\mathcal{U}$, εάν υπάρχει ένα ΠΠΔ $\mathcal{A}$ τ.ώ. για κάθε ανάθεση εισόδου $x \in X^*$ και κάθε $G = (V, E) \in \mathcal{U}$ τ.ώ. $|V| = |x|$, κάθε υπολογισμός του $\mathcal{A}$ στο $G$ που ξεκινάει απ' την αρχική φάση που αντιστοιχεί στην $x$ τελικά φτάνει μία σταθερής εξόδου φάση στην οποία όλοι οι πράκτορες δίνουν ως έξοδο $p(x)$.*

**Ορισμός 3.** *Μία φάση $C$ καλείται σταθερής κατάστασης εάν για κάθε φάση $C'$ τ.ώ. $C \xrightarrow{*} C'$ ισχύει ότι $C' = C$.*

Λέμε ότι ένα πρωτόκολλο $\mathcal{A}$ έχει *σταθεροποιούμενες καταστάσεις* εάν κάθε υπολογισμός του $\mathcal{A}$ τελικά φτάνει μία φάση σταθερής κατάστασης· με απλά λόγια, οι καταστάσεις των πρακτόρων τελικά παύουν να αλλάζουν. Παρατηρήστε ότι κάθε πρωτόκολλο που σταθεροποιείται ως προς τις καταστάσεις του σταθεροποιείται και ως προς τις εξόδους του, αλλά το αντίστροφο δεν είναι γενικά αληθές (οι σταθεροποιούμενες καταστάσεις είναι ισχυρότερη απαίτηση).

Σε ορισμένες περιπτώσεις, ένα πρωτόκολλο μπορεί, αντί να υπολογίζει σταθερά ένα κατηγόρημα $p$, να παρέχει κάποια άλλου είδους εγγύηση. Για παράδειγμα, όποτε τρέχει για κάποια $x \in X^*$ τ.ώ. $p(x) = 1$, μπορεί τελικά να παραμείνει για πάντα σε φάσεις όπου τουλάχιστον ένας πράκτορας βρίσκεται στην κατάσταση $a$, ενώ όποτε $p(x) = 0$ μπορεί τελικά να παραμείνει για πάντα σε φάσεις όπου κανένας πράκτορας δε βρίσκεται στην κατάσταση $a$. Ας τυποποιήσουμε αυτή την ιδέα.

**Ορισμός 4.** *Λέμε ότι ένα ΠΠΔ $\mathcal{A}$* εγγυάται *το κατηγόρημα $t : Q^* \to \{0,1\}$ ως προς το $p : X^* \to \{0,1\}$ σε ένα σύμπαν γραφημάτων $\mathcal{U}$ εάν, για κάθε ανάθεση εισόδου $x \in X^*$ και κάθε $G = (V,E) \in \mathcal{U}$ τ.ώ. $|V| = |x|$, κάθε υπολογισμός του $\mathcal{A}$ στο $G$ που ξεκινάει απ' την αρχική φάση που αντιστοιχεί στην $x$ τελικά φτάνει σε μία φάση $C$ τ.ώ. για κάθε $C'$, όπου $C \xrightarrow{*} C'$, ισχύει ότι $t(C') = t(C) = p(x)$.*[1]

## 2.3 Κατηγορήματα Επί Αναθέσεων Εισόδου

Εδώ υποθέτουμε ότι το γράφημα επικοινωνίας είναι πλήρες και ότι όλες οι ακμές βρίσκονται αρχικά σε κάποια κοινή κατάσταση $s_0$. Δηλαδή, το σύμπαν εδώ είναι το $\{G \mid$

[1] *Παρατηρήστε ότι υποθέτοντας μία διάταξη πάνω στο $V$ μπορούμε να ορίσουμε τις φάσεις ως συμβολοσειρές από το $Q^*$ όπως ακριβώς έχουμε μέχρι τώρα κάνει και για τις αναθέσεις εισόδου.*

το $G$ είναι πλήρες $\}$ και $\iota(e) = s_0$ για κάθε $e \in E$. Χάριν ευκολίας, θεωρούμε ότι η $s_0$ είναι η πρώτη κατάσταση που εμφανίζεται στο $S$ (συνήθως θα τη συμβολίζουμε με 0 ή $s_0$) και δίνουμε σε αυτή την ειδική περίπτωση του μοντέλου ΠΠΔ το ξεχωριστό όνομα ΣΠΠΔ (όπου το 'Σ' προκύπτει από τη λέξη "Συμμετρικά"). Μας ενδιαφέρει η υπολογιστική ισχύς του μοντέλου ΣΠΠΔ. Συγκεκριμένα, θα δώσουμε έναν ακριβή χαρακτηρισμό των σταθερά υπολογίσιμων κατηγορημάτων.

**Ορισμός 5.** *Έστω $MPS$ η κλάση των σταθερά υπολογίσιμων κατηγορημάτων από το μοντέλο ΣΠΠΔ και $SEM$ η κλάση των ημιγραμμικών κατηγορημάτων.*

**Παρατήρηση 1.** *Κάθε κατηγόρημα που ανήκει στην $MPS$ πρέπει να είναι συμμετρικό επειδή το γράφημα επικοινωνίας είναι πλήρες και όλες οι ακμές βρίσκονται αρχικά στην ίδια κατάσταση.*

**Ορισμός 6.** *Έστω $SSPACE(f(n))$ και $SNSPACE(f(n))$ οι περιορισμοί των κλάσεων $SPACE(f(n))$ και $NSPACE(f(n))$, αντίστοιχα, σε συμμετρικά κατηγορήματα.*

### 2.3.1 Η $MPS$ είναι γνήσιο υπερσύνολο της $SEM$

Πρώτα δείχνουμε ότι η $MPS$ είναι υπερσύνολο της $SEM$ και έπειτα ότι το μη ημιγραμμικό κατηγόρημα $(N_c = N_a \cdot N_b)$ ανήκει στην κλάση $MPS$, όπου το $N_\sigma$ συμβολίζει το πλήθος των πρακτόρων που λαμβάνουν το σύμβολο εισόδου $\sigma$. Αυτό (λόγω του γεγονότος ότι τα πρωτόκολλα πληθυσμών δε μπορούν να διεκπεραιώσουν πολλαπλασιασμό μεταβλητών) μας δίνει τον ακόλουθο διαχωρισμό: *η $MPS$ είναι γνήσιο υπερσύνολο της $SEM$.*

**Λήμμα 2.** *$SEM \subseteq MPS$.*

*Απόδειξη.* Θεωρήστε οποιοδήποτε ημιγραμμικό κατηγόρημα $p$. Έστω $\mathcal{A}$ το ΠΠ που υπολογίζει σταθερά το $p$. Κατασκευάζουμε ένα ΣΠΠΔ $\mathcal{B} = (X, Y, Q, S, I, O, \delta)$ που υπολογίζει σταθερά το $p$. Όλες οι συνιστώσες του $\mathcal{B}$ είναι ίδιες με εκείνες του $\mathcal{A}$ εκτός απ' το $S$ το οποίο δεν καθορίζεται απ' το $\mathcal{A}$ και τη $\delta$ η οποία πρέπει να οριστεί διαφορετικά. Το $S$ είναι ίσο με το $\{s_0\}$. Έστω $\delta'$ η συνάρτηση μεταβάσεων του $\mathcal{A}$. Η $\delta$ ορίζεται ως $\delta(a, b, s_0) = (\delta'_1(a, b), \delta'_2(a, b), s_0)$ για κάθε $a, b \in Q$. Προφανώς, το $\mathcal{B}$ αγνοεί τις ακμές και κάνει ό, τι και το $\mathcal{A}$, δηλαδή, υπολογίζει σταθερά το $p$. Ένας άλλος άμεσος τρόπος για να πειστεί κανείς είναι να παρατηρήσει ότι το μοντέλο των πρωτοκόλλων πληθυσμών είναι μία ειδική περίπτωση του μοντέλου με διαμεσολαβητή. □

---

**Πρωτόκολλο 1** *VarProduct*

---

1: $X = \{a, b, c\}$
2: $Y = \{0, 1\}$
3: $Q = \{a, \dot{a}, b, c, \bar{c}\}$
4: $S = \{0, 1\}$
5: $I(\sigma) = \sigma$, για κάθε $\sigma \in X$
6: $O(a) = O(b) = O(\bar{c}) = 1$ και $O(c) = O(\dot{a}) = 0$
7: $\delta$: $(a, b, 0) \to (\dot{a}, b, 1)$, $(c, \dot{a}, 0) \to (\bar{c}, a, 0)$, $(\dot{a}, c, 0) \to (a, \bar{c}, 0)$
8: // Όλες οι μεταβάσεις που δεν εμφανίζονται είναι αναποτελεσματικές, π.χ. $\delta(a, b, 1) = (a, b, 1)$

---

**Θεώρημα 2.** *Το πρωτόκολλο* VarProduct *(δείτε το Πρωτόκολλο 1) παρέχει ως προς το κατηγόρημα* $(N_c = N_a \cdot N_b)$ *την ακόλουθη ημιγραμμική εγγύηση:*

- *Εάν* $N_c \neq N_a \cdot N_b$ *τότε τουλάχιστον ένας πράκτορας παραμένει σε κάποια από τις καταστάσεις* $\dot{a}$ *και* $c$.
- *Εάν* $N_c = N_a \cdot N_b$ *τότε κανένας πράκτορας δεν παραμένει σε αυτές τις καταστάσεις.*

*Απόδειξη.* Παρατηρήστε ότι λόγω της πληρότητας του γραφήματος επικοινωνίας, το πλήθος των συνδέσμων που οδηγούν από πράκτορες κατάστασης $a$ σε πράκτορες κατάστασης $b$ ισούται με $N_a \cdot N_b$. Για κάθε $a$ το πρωτόκολλο προσπαθεί να διαγράψει τόσα $c$

όσα είναι και τα $b$. Κάθε πράκτορας κατάστασης $a$ μπορεί να θυμάται τα $b$ που έχει ήδη προσμετρήσει (για κάθε τέτοιο $b$ ένα $c$ έχει διαγραφεί) σημαδεύοντας τους αντίστοιχους συνδέσμους (παρατηρήστε ότι αυτό ήταν προφανώς αδύνατο στο μοντέλο ΠΠ). Εάν τα $c$ ήταν λιγότερα από το γινόμενο τότε τουλάχιστον ένα $\dot{a}$ παραμένει και εάν τα $c$ ήταν περισσότερα τουλάχιστον ένα $c$ παραμένει (και στις δύο περιπτώσεις τουλάχιστον ένας πράκτορας διατηρεί έξοδο 0). Εάν $N_c = N_a \cdot N_b$ τότε κανείς πράκτορας δε διατηρεί κάποια από τις καταστάσεις $\dot{a}$ και $c$ (με άλλα λόγια, τελικά κάθε πράκτορας δίνει έξοδο 1). □

**Παρατήρηση 2.** *Είναι εύκολο να δει κανείς ότι το Πρωτόκολλο* VarProduct *έχει σταθεροποιούμενες καταστάσεις.*

Παρατηρήστε ότι από μόνο του το Θεώρημα 2 δεν ολοκληρώνει το διαχωρισμό των $SEM$ και $MPS$. Ο λόγος είναι πως δε δείχνει ότι το μοντέλο ΣΠΠΔ υπολογίζει σταθερά το $(N_c = N_a \cdot N_b)$· αυτό που πραγματικά δείχνει είναι ότι όποτε το κατηγόρημα είναι αληθές ο υπολογισμός φτάνει σε μία φάση σταθερής κατάστασης για την οποία κάποιο άλλο κατηγόρημα $t$ επί του συνόλου των φάσεων γίνεται αληθές και όποτε το κατηγόρημα είναι ψευδές το $t$ είναι επίσης ψευδές. Στην πραγματικότητα, υπάρχει ένας τρόπος να εκμεταλλευτούμε την εγγύηση και τις σταθεροποιούμενες καταστάσεις ούτως ώστε να επιτύχουμε το διαχωρισμό των κλάσεων. Αυτό εκφράζεται απ' το ακόλουθο γενικό θεώρημα σύνθεσης πρωτοκόλλων που ισχύει και για μη πλήρη γραφήματα επικοινωνίας.

**Θεώρημα 3.** *Έστω $\mathcal{G}$ μία οικογένεια κατευθυντών και συνεκτικών γραφημάτων επικοινωνίας. Εάν υπάρχει ένα ΠΠΔ $\mathcal{A}$ με σταθεροποιούμενες καταστάσεις που, στην $\mathcal{G}$, εγγυάται ως προς κάποιο κατηγόρημα $p$ ένα ημιγραμμικό κατηγόρημα $t$, τότε το $p$ είναι σταθερά υπολογίσιμο από το μοντέλο ΠΠΔ στην $\mathcal{G}$.*

*Απόδειξη.* Θα δείξουμε ότι (δ.ό.) το $\mathcal{A}$ μπορεί να συντεθεί με ένα πρωτόκολλο $\mathcal{B}$, που υπολογίζει σταθερά το $t$ και που αποδεδειγμένα υπάρχει, για να δώσουν ένα νέο ΠΠΔ $\mathcal{C}$ που ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

- Το $\mathcal{C}$ είναι η σύνθεση των $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$,
- η είσοδός του είναι η είσοδος του $\mathcal{A}$,
- η έξοδός του είναι η έξοδος του $\mathcal{B}$ και
- το $\mathcal{C}$ υπολογίζει σταθερά το $p$ στην $\mathcal{G}$.

Το πρωτόκολλο $\mathcal{A}$ έχει σταθεροποιούμενες καταστάσεις και παρέχει μία εγγύηση $t$ η οποία είναι ένα ημιγραμμικό κατηγόρημα επί των φάσεων του $\mathcal{A}$. Έστω $X_{\mathcal{A}}$ το αλφάβητο εισόδου του $\mathcal{A}$, $Q_{\mathcal{A}}$ το σύνολο καταστάσεων του $\mathcal{A}$, $\delta_{\mathcal{A}}$ η συνάρτηση μεταβάσεων του $\mathcal{A}$ και παρομοίως για κάθε άλλη συνιστώσα του $\mathcal{A}$. Θα χρησιμοποιήσουμε τους δείκτες $\mathcal{B}$ και $\mathcal{C}$ για τις αντίστοιχες συνιστώσες των άλλων δύο πρωτοκόλλων.

Αφού το κατηγόρημα $t$ είναι ημιγραμμικό, σύμφωνα με ένα αποτέλεσμα στην [5], υπάρχει ένα πρωτόκολλο πληθυσμών $\mathcal{B}'$ που υπολογίζει σταθερά το $t$ με σταθεροποιούμενες εισόδους στην $\mathcal{G}_{con}$. Παρατηρήστε ότι $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}_{con}$, συνεπώς κάθε κατηγόρημα που είναι σταθερά υπολογίσιμο στην $\mathcal{G}_{con}$ (είτε με είτε χωρίς σταθεροποιούμενες εισόδους) είναι σταθερά υπολογίσιμο και στην $\mathcal{G}$. Στην πραγματικότητα, το ίδιο πρωτόκολλο $\mathcal{B}'$ υπολογίζει σταθερά το $t$ με σταθεροποιούμενες εισόδους στην $\mathcal{G}$. Επιπρόσθετα, υπάρχει ένα ΠΠΔ $\mathcal{B}$ (αυτό που είναι ίδιο με το $\mathcal{B}'$ αλλά απλώς αγνοεί τις επιπλέον συνιστώσες του νέου μοντέλου) που υπολογίζει σταθερά το $t$ με σταθεροποιούμενες εισόδους στην $\mathcal{G}$. Παρατηρήστε ότι το αλφάβητο εισόδου του $\mathcal{B}$ είναι $X_{\mathcal{B}} = Q_{\mathcal{A}}$ και η συνάρτηση μεταβάσεών του είναι της μορφής $\delta_{\mathcal{B}} : (Q_{\mathcal{A}} \times Q_{\mathcal{B}}) \times (Q_{\mathcal{A}} \times Q_{\mathcal{B}}) \rightarrow Q_{\mathcal{B}} \times Q_{\mathcal{B}}$, αφού δε χρειάζεται να καθορίσουμε καταστάσεις ακμών (τυπικά θα έπρεπε αλλά το πρωτόκολλο απλώς τις αγνοεί). Στην πραγματικότητα, το $Q_{\mathcal{A}}$ παίζει το ρόλο των εισόδων του $\mathcal{B}$ που τελικά σταθεροποιούνται.

Ορίζουμε ένα ΠΠΔ $\mathcal{C}$ ως εξής: $X_{\mathcal{C}} = X_{\mathcal{A}}$, $Y_{\mathcal{C}} = Y_{\mathcal{B}} = \{0, 1\}$, $Q_{\mathcal{C}} = Q_{\mathcal{A}} \times Q_{\mathcal{B}}$, $I_{\mathcal{C}} : X_{\mathcal{A}} \rightarrow Q_{\mathcal{C}}$ που ορίζεται ως $I_{\mathcal{C}}(x) = (I_{\mathcal{A}}(x), i_{\mathcal{B}})$ για κάθε $x \in Q_{\mathcal{C}}$, όπου $i_{\mathcal{B}} \in Q_{\mathcal{B}}$ είναι η αρχική κατάσταση του πρωτοκόλλου $\mathcal{B}$, $S_{\mathcal{C}} = S_{\mathcal{A}}$, $O_{\mathcal{C}}(a, b) = O_{\mathcal{B}}(b)$, για κάθε $q =$

$(a,b) \in Q_{\mathcal{C}}$, και τέλος η συνάρτηση μεταβάσεών του $\delta_{\mathcal{C}} : Q_{\mathcal{C}} \times Q_{\mathcal{C}} \times S_{\mathcal{C}} \to Q_{\mathcal{C}} \times Q_{\mathcal{C}} \times S_{\mathcal{C}}$ ορίζεται ως

$$\begin{aligned}\delta_{\mathcal{C}}((a,b),(a',b'),s) = ((&\delta_{\mathcal{A}_1}(a,a',s), \delta_{\mathcal{B}_1}((a,b),(a',b'))),\\ (&\delta_{\mathcal{A}_2}(a,a',s), \delta_{\mathcal{B}_2}((a,b),(a',b'))),\\ &\delta_{\mathcal{A}_3}(a,a',s)),\end{aligned}$$

όπου για κάθε $\delta_{\mathcal{A}}(x,y,z) = (x',y',z')$ (στη συνάρτηση μεταβάσεων του $\mathcal{A}$), έχουμε ότι $\delta_{\mathcal{A}_1}(x,y,z) = x'$, $\delta_{\mathcal{A}_2}(x,y,z) = y'$, $\delta_{\mathcal{A}_3}(x,y,z) = z'$ και παρομοίως για την $\delta_{\mathcal{B}}$.

Διαισθητικά, το $\mathcal{C}$ αποτελείται από τα $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ που εκτελούνται παράλληλα. Η κατάσταση κάθε πράκτορα είναι ένα ζεύγος $c = (a,b)$, όπου $a \in Q_{\mathcal{A}}$, $b \in Q_{\mathcal{B}}$ και η κατάσταση κάθε ακμής είναι ένα στοιχείο του $S_{\mathcal{A}}$. Αρχικά κάθε πράκτορας αισθάνεται μία είσοδο $x$ απ' το $X_{\mathcal{A}}$ και αυτή μετατρέπεται σύμφωνα με την $I_{\mathcal{C}}$ σε ένα τέτοιο ζεύγος, όπου $a = I_{\mathcal{A}}(x)$ και το $b$ είναι πάντα μία ειδική αρχική κατάσταση $\iota_{\mathcal{B}} \in Q_{\mathcal{B}}$ του $\mathcal{B}$. Όταν δύο πράκτορες με καταστάσεις $(a,b)$ και $(a',b')$ αλληλεπιδρούν μέσω μίας ακμής με κατάσταση $s$, τότε το $\mathcal{A}$ ανανεώνει τις πρώτες συνιστώσες των καταστάσεων των πρακτόρων (δηλαδή τις $a$ και $a'$) και την κατάσταση της ακμής, σα να μην υπήρχε το $\mathcal{B}$. Από την άλλη, το $\mathcal{B}$ ανανεώνει τις δεύτερες συνιστώσες λαμβάνοντας υπ΄ όψιν του τις πρώτες που αναπαριστούν τις ξεχωριστές θύρες εισόδου στις οποίες είναι διαθέσιμο σε κάθε αλληλεπίδραση το τρέχον σύμβολο εισόδου κάθε πράκτορα (το $\mathcal{B}$ θεωρεί τις καταστάσεις του $\mathcal{A}$ ως σύμβολα εισόδου τα οποία μπορεί να μεταβληθούν αυθαίρετα μεταξύ δύο οποιονδήποτε υπολογιστικών βημάτων, αλλά ο πραγματικός λόγος για τον οποίο μεταβάλλονται είναι ο υπολογισμός του $\mathcal{A}$ που μπορεί να μην έχει ακόμα σταθεροποιηθεί). Αφού οι πρώτες συνιστώσες των καταστάσεων πρακτόρων του $\mathcal{C}$ τελικά σταθεροποιούνται (το $\mathcal{A}$ έχει σταθεροποιούμενες καταστάσεις) το πρωτόκολλο $\mathcal{B}$ θα αποκτήσει τελικά σταθερές εισόδους. Όταν αυτό συμβεί, το $\mathcal{B}$ θα εκτελεστεί σωστά και θα υπολογίσει σταθερά το $t$ σα να είχε ξεκινήσει τον υπολογισμό από τη φάση σταθερής εξόδου του $\mathcal{A}$. Όμως, αφού το $t$ παρέχει τη σωστή απάντηση για το $p$ εάν εφαρμοστεί στη φάση σταθερής εξόδου του $\mathcal{A}$, είναι προφανές ότι το $\mathcal{C}$ πρέπει να υπολογίζει σταθερά το $p$ στην $\mathcal{G}$, γεγονός που ολοκληρώνει την απόδειξη. □

**Πόρισμα 1.** *Το μη ημιγραμμικό κατηγόρημα* $(N_c = N_a \cdot N_b)$ *ανήκει στην* $MPS$.

*Απόδειξη.* Προκύπτει άμεσα παρατηρώντας ότι το Θεώρημα 2 και η Παρατήρηση 2 ικανοποιούν τις απαιτήσεις του Θεωρήματος 3. □

**Θεώρημα 4.** *Η* $SEM$ *είναι γνήσιο υποσύνολο της* $MPS$.

*Απόδειξη.* Από το Λήμμα 2 έχουμε ότι $SEM \subseteq MPS$ και από το Πόρισμα 1 μαζί με το γεγονός ότι το $(N_c = N_a \cdot N_b)$ δεν είναι ημιγραμμικό έχουμε ότι $(N_c = N_a \cdot N_b) \in MPS - SEM$. □

### 2.3.2 Ένας Καλύτερος Εγκλεισμός: $SSPACE(n) \subseteq MPS$

Σε αυτή την Ενότητα θα καθιερώσουμε έναν πολύ καλύτερο εγκλεισμό. Συγκεκριμένα, θα δ.ό. κάθε κατηγόρημα στην $SSPACE(n)$ ανήκει επίσης στην $MPS$. Με άλλα λόγια, το μοντέλο ΣΠΠΔ είναι τουλάχιστον τόσο ισχυρό όσο και μία ΤΜ γραμμικού χώρου που υπολογίζει συμμετρικά κατηγορήματα. Ξεκινάμε με κάποιους απαραίτητους ορισμούς.

Έστω $G = (V, E)$ ένα γράφημα επικοινωνίας. Ένα *γραμμικό (δι)γράφημα* $L = (K, A)$ είναι είτε ένας απομονωμένος κόμβος (δηλαδή, $|K| = 1$ και $A = \emptyset$), ο οποίος είναι το *τετριμμένο* γραμμικό γράφημα, είτε ένα δέντρο τ.ώ., εάν αγνοήσουμε τις κατευθύνσεις των συνδέσμων, δύο κόμβοι έχουν βαθμό ένα και όλοι οι υπόλοιποι έχουν βαθμό δύο. Ένα γραμμικό υπογράφημα του $G$ είναι ένα γραμμικό γράφημα $L \subseteq G$ και καλείται *επικαλυπτικό* εάν $K = V$. Έστω $d(u)$ ο βαθμός του $u \in K$ ως προς το $A$ (δηλαδή, $d(u) = |\Gamma(u)|$, όπου $\Gamma(u) = \{(t, k) \in A \mid t = u \text{ ή } k = u\}$). Έστω $C_l(t)$ η *συνιστώσα* *επιγράμματος* της κατάστασης του $t \in V \cup E$ κατά τη φάση $C$ (στην αρχή θα την καλούμε απλώς "κατάσταση", χάριν ευκολίας).

Λέμε ότι ένα γραμμικό υπογράφημα του $G$ έχει *σωστά επιγράμματα* κατά τη φάση $C$, εάν είναι τετριμμένο, η κατάστασή του είναι η $l$ και δεν πρόσκεινται σε αυτό ενεργές ακμές ή εάν είναι μη τετριμμένο και ικανοποιούνται όλα τα ακόλουθα:

1. Υποθέστε ότι $u, v \in K$ και $d(u) = d(v) = 1$. Αυτοί είναι οι μόνοι κόμβοι στο $K$ με βαθμό 1. Τότε ένας από τους $u$ και $v$ είναι στην κατάσταση $k_t$ (ακραίο σημείο ακολούθου) και ο άλλος είναι είτε στην κατάσταση $l_t$ είτε στην κατάσταση $l_h$ (ακραίο σημείο αρχηγού). Η μοναδική $e_u \in A$ που πρόσκειται στον $u$, όπου ο $u$ είναι χ.β.τ.γ. στην κατάσταση $k_t$, είναι μία εξερχόμενη ακμή και η μοναδική $e_v \in A$ που πρόσκειται στον $v$ είναι εξερχόμενη αν $C_l(v) = l_t$ και εισερχόμενη αν $C_l(v) = l_h$.

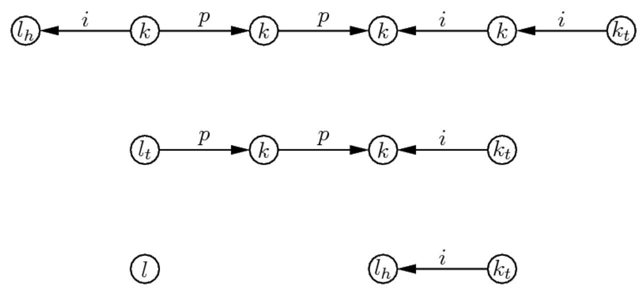
2. Για κάθε $w \in K - \{u, v\}$ (εσωτερικοί κόμβοι) ισχύει ότι $C_l(w) = k$.

3. Για κάθε $a \in A$ ισχύει ότι $C_l(a) \in \{p, i\}$ και για κάθε $e \in E - A$ τ.ώ. η $e$ να πρόσκειται σε κάποιο κόμβο του $K$ ισχύει ότι $C_l(e) = 0$.

4. Έστω $v = u_1, u_2, \ldots, u_r = u$ το μονοπάτι από το ακραίο σημείο αρχηγού προς το ακραίο σημείο ακολούθου (που προκύπτει αν αγνοήσουμε τις κατευθύνσεις των τόξων στο $A$). Έστω $P_L = \{(u_i, u_{i+1}) \mid 1 \leq i < r\}$ το αντίστοιχο κατευθυντό μονοπάτι από τον $v$ στον $u$. Τότε για κάθε $a \in A \cap P_L$ ισχύει ότι $C_l(a) = p$ (ορθές ακμές) και για κάθε $a' \in A - P_L$ ότι $C_l(a') = i$ (ανάστροφες ακμές).

Δείτε στο Σχήμα 2.1 μερικά παραδείγματα γραμμικών υπογραφημάτων με σωστά επιγράμματα. Το νόημα κάθε κατάστασης που αναφέρθηκε ως τώρα θα γίνει σαφές στην απόδειξη του Θεωρήματος 5 που ακολουθεί.

**Θεώρημα 5.** *Υπάρχει ένα ΣΠΠΔ $\mathcal{A}$ που κατασκευάζει ένα επικαλυπτικό γραμμικό υπογράφημα με σωστά επιγράμματα για κάθε πλήρες γράφημα επικοινωνίας $G$.*



Σχήμα 2.1. Ορισμένα γραμμικά υπογραφήματα με σωστά επιγράμματα. Υποθέτουμε ότι όλες οι ακμές που δεν εμφανίζονται βρίσκονται στην κατάσταση 0 (ανενεργές).

*Απόδειξη.* Παρέχουμε μία υψηλού επιπέδου περιγραφή του πρωτοκόλλου $\mathcal{A}$ ούτως ώστε να αποφύγουμε τις πολλές χαμηλού επιπέδου λεπτομέρειες που απαιτούνται. Όλοι οι πράκτορες βρίσκονται αρχικά στην κατάσταση $l$, και τους θεωρούμε ως *απλούς αρχηγούς*. Όλες οι ακμές βρίσκονται στην κατάσταση 0 και τις θεωρούμε ως *ανενεργές*, δηλαδή, ότι δεν αποτελούν προς το παρόν μέρος του γραμμικού υπογραφήματος που πρόκειται να κατασκευαστεί. Μία ακμή στην κατάσταση $p$ ερμηνεύεται ως *ορθή* ενώ μία ακμή στην κατάσταση $i$ ερμηνεύεται ως *ανάστροφη*· και οι δύο ερμηνεύονται επιπλέον ως *ενεργές*, δηλαδή ότι αποτελούν μέρος του γραμμικού υπογραφήματος που θα κατασκευαστεί. Ένας πράκτορας στην κατάσταση $k$ είναι ένας (*απλός*) *ακόλουθος*, ένας πράκτορας στην κατάσταση $k_t$ είναι ένας ακόλουθος που επιπλέον είναι και η *ουρά* κάποιου γραμμικού υπογραφήματος (*ακόλουθος ουράς*), ένας πράκτορας στην κατάσταση $l_t$ είναι ένας αρχηγός που επιπλέον είναι και η ουρά κάποιου γραμμικού υπογραφήματος (*αρχηγός ουράς*) και ένας πράκτορας στην κατάσταση $l_h$ είναι ένας αρχηγός που επιπλέον είναι και η *κεφαλή* κάποιου γραμμικού υπογραφήματος (*αρχηγός κεφαλής*). Όλα αυτά θα αποσαφηνιστούν στη συνέχεια. Ένας *αρχηγός* είναι ένας απλός αρχηγός, ένας αρχηγός ουράς ή κεφαλής.

Όταν δύο απλοί αρχηγοί αλληλεπιδρούν μέσω μίας ανενεργής ακμής, ο μυητής γίνεται ακόλουθος ουράς, ο αποκρινόμενος γίνεται αρχηγός κεφαλής και η ακμή γίνεται ανάστροφη. Όταν ένας αρχηγός κεφαλής αλληλεπιδράσει ως μυητής με έναν απλό αρχηγό μέσω μίας ανενεργής ακμής, ο μυητής γίνεται ακόλουθος, ο αποκρινόμενος γίνεται αρχηγός κεφαλής και η ακμή γίνεται ανάστροφη. Όταν ο απλός αρχηγός είναι ο μυητής, ο αρχηγός κεφαλής είναι ο αποκρινόμενος και η ακμή είναι και πάλι ανενεργή, ο μυητής γίνεται αρχηγός ουράς, ο αποκρινόμενος γίνεται ακόλουθος και η ακμή γίνεται ορθή. Όταν ένας αρχηγός ουράς αλληλεπιδράσει ως μυητής με έναν απλό αρχηγό μέσω μίας ανενεργής ακμής, ο μυητής γίνεται ακόλουθος, ο αποκρινόμενος γίνεται αρχηγός κεφαλής και η ακμή γίνεται ανάστροφη. Όταν ο απλός αρχηγός είναι ο μυητής, ο αρχηγός ουράς είναι ο αποκρινόμενος και η ακμή είναι και πάλι ανενεργή, ο μυητής γίνεται αρχηγός ουράς, ο αποκρινόμενος γίνεται ακόλουθος και η ακμή γίνεται ορθή. Αυτές οι μεταβάσεις να συνοψιστούν τυπικά ως εξής:

$$
\begin{aligned}
(l, l, 0) &\to (k_t, l_h, i), \\
(l_h, l, 0) &\to (k, l_h, i), \\
(l, l_h, 0) &\to (l_t, k, p), \\
(l_t, l, 0) &\to (k, l_h, i) \text{ και} \\
(l, l_t, 0) &\to (l_t, k, p).
\end{aligned}
$$

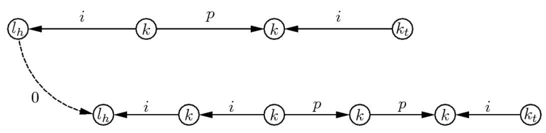
Με τον τρόπο αυτό οι πράκτορες οργανώνονται σε γραμμικά υπογραφήματα με σωστά επιγράμματα (δείτε και πάλι τον ορισμό τους και το Σχήμα 2.1).

Περιγράφουμε τώρα πώς δύο τέτοια γραμμικά γραφήματα $L_1$ και $L_2$ *συνενώνονται*. Συμβολίζουμε με $l(L) \in V$ και με $k_t(L) \in V$ τα ακραία σημεία αρχηγού και ακολούθου ουράς, αντίστοιχα, ενός γραμμικού γραφήματος $L$ με σωστά επιγράμματα. Όταν ο $l(L_1) = u$ αλληλεπιδρά ως μυητής με τον $l(L_2) = v$ μέσω μίας ανενεργής ακμής, ο $v$ γίνεται ακόλουθος με ένα ειδικό σημάδι, π.χ. $k'$, η ακμή γίνεται ορθή με ένα ειδικό σημάδι και ο $u$ γίνεται αρχηγός σε μία ειδική κατάσταση $l'$ η οποία θα ταξιδέψει προς τον $k_t(L_1)$ μετατρέποντας παράλληλα όλες τις ορθές ακμές που θα συναντήσει σε ανάστροφες και όλες τις ανάστροφες σε ορθές. Για να γνωρίζει την κατεύθυνση προς την οποία πρέπει να κινηθεί, σημαδεύει κάθε ακμή που διασχίζει. Όταν τελικά φτάσει στο άκρο, μετατρέπεται σε μία άλλη ειδική κατάσταση και διασχίζει το ίδιο μονοπάτι προς την αντίθετη κατεύθυνση μέχρι να συναντήσει και πάλι τον $v$. Αυτός ο περίπατος μπορεί να πραγματοποιηθεί εύκολα, χωρίς να γίνεται χρήση των σημαδιών, επειδή τώρα όλες οι ακμές έχουν σωστά επιγράμματα (καταστάσεις). Για να αποκλίνει από το άκρο του $L_1$ απλώς ακολουθεί τους ορθούς συνδέσμους ως μυήτρια (με αποτέλεσμα να κινηθεί από την ουρά προς στην κεφαλή τους) και τους ανάστροφους συνδέσμους ως αποκρινόμενη (με αποτέλεσμα να κινηθεί από την κεφαλή προς στην ουρά τους) ενώ παράλληλα διαγράφει όλα τα σημάδια που είχαν απομείνει από τον προηγούμενο περίπατό της. Όταν φτάσει στον $v$ διαγράφει το σημάδι του, κάνοντας την κατάστασή του $k$, και μετατρέπεται σε μία άλλη ειδική κατάσταση η οποία πρέπει και πάλι να κινηθεί προς τον $k_t(L_1)$ για τελευταία φορά και χωρίς να πραγματοποιεί καμία άλλη λειτουργία αυτή τη φορά. Για να το κάνει αυτό απλώς ακολουθεί τους ορθούς συνδέσμους ως αποκρινόμενη (από την κεφαλή στην ουρά τους) και τις ανάστροφες ακμές ως μυήτρια (από την ουρά στην κεφαλή τους). Όταν τελικά φτάσει στον $k_t(L_1)$, ο τελευταίος γίνεται απλός ακόλουθος ουράς και τώρα είναι εύκολο να δει κανείς ότι τα $L_1$ και $L_2$ έχουν συνενωθεί επιτυχώς σε ένα κοινό γραμμικό γράφημα με σωστά επιγράμματα. Στο Σχήμα 2.2 παρουσιάζουμε ένα γραφικό παράδειγμα βηματικής εκτέλεσης. Η ορθότητα αυτής της διαδικασίας, που καλείται *διαδικασία συνένωσης*, εκφράζεται από το Λήμμα 3.

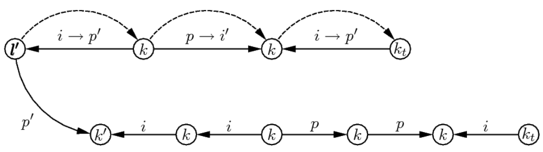
**Λήμμα 3.** *Όταν τα ακραία σημεία αρχηγού δύο ξένων γραμμικών υπογραφημάτων $L_1 = (K_1, A_1)$ και $L_2 = (K_2, A_2)$ του $G$ με σωστά επιγράμματα αλληλεπιδρούν μέσω κάποιας $e \in E$, τότε, σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων, τα $L_1$ και $L_2$ συνενώνονται και δίνουν ένα νέο γραμμικό γράφημα $L_3 = (K_1 \cup K_2, A_1 \cup A_2 \cup \{e\})$ με σωστά επιγράμματα.*

*Απόδειξη.* Εξετάζουμε όλες τις πιθανές περιπτώσεις:

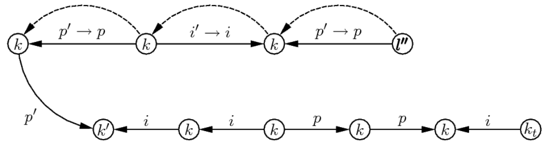
- *Τα $L_1$ και $L_2$ είναι και τα δύο τετριμμένα (είναι απομονωμένοι απλοί αρχηγοί, όπου με τον όρο "απομονωμένοι" εννοούμε ότι όλες οι ακμές που πρόσκεινται σε αυτούς είναι ανενεργές):* Τότε ο μυητής γίνεται ακόλουθος ουράς, ο αποκρινόμενος γίνεται αρχηγός κεφαλής και η ακμή γίνεται ανάστροφη.



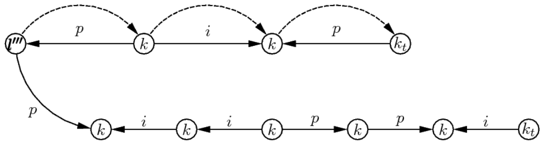
(α′) Πριν τη συνένωση.



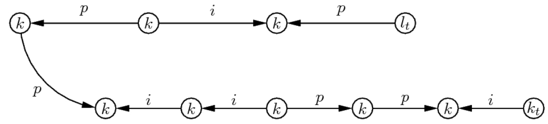
(β′) Η $l'$ κινείται προς τον $k_t$ και αντιστέφει τα επιγράμματα.



(γ′) Η $l''$ κινείται προς τον $k'$ και αφαιρεί τα σημάδια.



(δ′) Η $l'''$ κινείται προς τον $k^t$ και κατά την άφιξή της γίνεται $l_t$.



(ε′) Μετά τη συνένωση.

Σχήμα 2.2. Δύο γραμμικά υπογραφήματα συνενώνονται.

- *Το $L_1$ δεν είναι τετριμμένο και το $L_2$ είναι τετριμμένο*: Υποθέστε πρώτα ότι ο αρχηγός του $L_1$ είναι αρχηγός ουράς. Εάν ο αρχηγός ουράς είναι ο μυητής, τότε γίνεται ακόλουθος, ο αποκρινόμενος γίνεται αρχηγός κεφαλής (το ακραίο σημείο αρχηγού του νέου γραμικού γραφήματος $L_3$) και η ακμή γίνεται ανάστροφη. Προφανώς, η ακμή που εισήχθη δείχνει προς τον νέο αρχηγό του μονοπατιού και σωστά είναι ανάστροφη, όλες οι άλλες ακμές σωστά διατηρούν τα επιγράμματα κατεύθυνσης που είχαν, ο προηγούμενος αρχηγός γίνεται εσωτερικός κόμβος, επομένως, σωστά γίνεται ακόλουθος και το άλλο άκρο παραμένει ανεπηρέαστο, επομένως, σωστά παραμένει ακόλουθος ουράς. Τις περιπτώσεις κατά τις οποίες ο αρχηγός του $L_1$ είναι αρχηγός κεφαλής και εκείνες κατά τις οποίες ο αρχηγός του $L_1$ είναι ο αποκρινόμενος τις χειριζόμαστε με παρόμοιο τρόπο.

- *Το $L_1$ είναι τετριμμένο και το $L_2$ δεν είναι τετριμμένο*: Αυτή η περίπτωση είναι συμμετρική με την προηγούμενη.

- *Τα $L_1$ και $L_2$ είναι και τα δύο μη τετριμμένα*: Υποθέστε χ.β.τ.γ. ότι ο αρχηγός του $L_1$ είναι ο μυητής. Τότε ο αρχηγός του $L_2$ θα γίνει ακόλουθος, το οποίο είναι σωστό αφού θα αποτελέσει έναν εσωτερικό κόμβο του νέου γραμμικού γραφήματος $L_3$ (το οποίο θα είναι το αποτέλεσμα της διαδικασίας συνένωσης). Αλλά πρώτα γίνεται σημαδεμένος ακόλουθος ούτως ώστε να ενημερώσει τον αρχηγό του $L_1$ σχετικά με το που θα πρέπει να τερματίσει την κίνησή του. Ο αρχηγός του $L_1$ περνάει σε μία ειδική κατάσταση που έχει αποτελεσματικές αλληλεπιδράσεις μόνο μέσω ενεργών ακμών. Αυτό εξασφαλίζει ότι ο αρχηγός αυτός έχει αποτελεσματικές αλληλεπιδράσεις μόνο με τους γείτονές του στο νέο γραμμικό γράφημα $L_3$. Επιπλέον, η ακμή μέσω της οποίας τα γραμμικά γραφήματα $L_1$ και $L_2$ συνενώνονται περνάει σε μία σημαδεμένη ορθή κατάσταση. Στόχος της διαδικασίας συνένωσης είναι να αντιστρέψει όλα τα επιγράμματα κατεύθυνσης του $L_1$, δηλαδή να κάνει όλες τις ορθές ακμές ανάστροφες και τις ανάστροφες ορθές. Ο λόγος είναι ότι το ακραίο σημείο ακολούθου του $L_1$ θα αποτελέσει το ακραίο σημείο αρχηγού του $L_3$ και εάν τα επιγράμματα κατεύθυνσης του $L_1$ παρέμεναν αμετάβλητα, τότε θα ήταν απολύτως λανθασμένα για το νέο γραμμικό γράφημα. Αντίθετα, τα επιγράμματα κατεύθυνσης του $L_2$ δεν πρέπει να μεταβληθούν αφού ο νέος τους αρχηγός θα παραμείνει στην ίδια μεριά (στο ίδιο ακραίο σημείο), επομένως θα συνεχίσουν να είναι σωστά ως προς την κατεύθυνση του μονοπατιού από το νέο ακραίο σημείο αρχηγού του $L_3$ προς το ακραίο σημείο ακολούθου. Όταν ο αρχηγός του $L_1$ αλληλεπιδρά μέσω μίας μη σημαδεμένης ενεργής ακμής, γνωρίζει ότι αλληλεπιδρά με κάποιο γείτονά του που δεν έχει ακόμα επισκεφθεί και ο οποίος βρίσκεται στην κατεύθυνση που οδηγεί προς το ακραίο σημείο ακολούθου ουράς του $L_1$. Επομένως, αντιστρέφει το επίγραμμα της ακμής, τη σημαδεύει για να θυμάται την κατεύθυνση του μονοπατιού και μεταβαίνει στον γειτονικό κόμβο, δηλαδή, ο γείτονας γίνεται ειδικός αρχηγός (σε ειδική κατάσταση) και ο ίδιος ο κόμβος γίνεται ακόλουθος. Με τον τρόπο αυτό, ο αρχηγός κινείται βήμα προς βήμα προς το άκραιο σημείο του $L_1$ αντιστρέφοντας παράλληλα τα επιγράμματα των ακμών. Τελικά, λόγω της δικαιοσύνης, θα φτάσει το άκρο. Τότε περνάει σε μία άλλη ειδική κατάσταση η οποία θα διασχίσει το ίδιο μονοπάτι προς την αντίθετη κατεύθυνση μέχρι να συναντήσει ξανά τον πρώην αρχηγό του $L_2$ ο οποίος είναι τώρα σημαδεμένος και επομένως μπορεί να αναγνωριστεί. Απλώς ακολουθεί τους σημαδεμένους συνδέσμους αφαιρώντας παράλληλα τα σημάδια των συνδέσμων που διασχίζει. Όταν τελικά συναντήσει το μοναδικό σημαδεμένο πράκτορα του $L_3$, του αφαιρεί το σημάδι, κάνοντάς τον απλό ακόλουθο, αφαιρεί το σημάδι από τη μοναδική ακμή που παραμένει σημαδεμένη (αυτή που συνένωσε τα $L_1$ και $L_2$) και περνάει σε μία άλλη ειδική κατάσταση η οποία θα κινηθεί και πάλι προς το άκρο του $L_1$ και εν συνεχεία θα γίνει αρχηγός ουράς, δηλαδή ο αρχηγός ουράς του $L_3$. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί εύκολα, επειδή τώρα όλοι οι σύνδεσμοι έχουν σωστά επιγράμματα. Συγκεκριμένα, γνωρίζει ότι εάν αλληλεπιδράσει ως αποκρινόμενος μέσω ενός ορθού συνδέσμου ή ως ο μυητής μέσω ενός ανάστροφου συνδέσμου τότε θα πρέπει να διασχίσει αυτόν τον σύνδεσμο μεταβαίνοντας και στις δύο περιπτώσει ένα βήμα πιο κοντά στο άκρο του $L_1$. Όλες οι άλλες αλληλεπιδράσεις αγνοούνται από αυτόν τον ειδικό αρχηγό. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι λόγω της δικαιοσύνης και λόγω του γεγονότος ότι μπορεί να κινείται μόνο προς το άκρο του $L_1$, τελικά θα το φτάσει. Όταν συμβεί αυτό, γίνεται ένας κανονικός αρχηγός ουράς. Θα πρέπει τώρα να είναι ξεκάθαρο ότι όλοι οι εσωτερικοί κόμβοι του $L_3$ είναι ακόλουθοι, το ένα άκρο έχει παραμείνει ακόλουθος ουράς ενώ το άλλο έχει γίνει αρχηγός ουράς, όλα τα επιγράμματα κατεύθυνσης είναι σωστά και όλες οι υπόλοιπες ακμές, που δεν αποτελούν μέρος του $L_3$ αλλά πρόσκεινται σε αυτό, έχουν παραμείνει ανενεργές. Συνεπώς, το $L_3$ έχει σωστά επιγράμματα.

$\square$

**Λήμμα 4.** *Τα γραμμικά γραφήματα με σωστά επιγράμματα δε μικραίνουν ποτέ.*

*Απόδειξη.* Έστω $r$ το πλήθος των κόμβων ενός γραμμικού γραφήματος $L_1$. Για $r = 1$ το τετριμμένο γραμμικό γράφημα αποτελείται από έναν απομονωμένο απλό αρχηγό. Η μόνη αποτελεσματική αλληλεπίδραση είναι με κάποιον άλλο αρχηγό ο οποίος είναι είτε απομονωμένος κόμβος είτε ο αρχηγός ενός άλλου γραμμικού γραφήματος $L_2$. Και στις δύο περιπτώσεις είναι ξεκάθαρο ότι κανένα γραμμικό γράφημα δε μικραίνει, αφού είτε το $L_1$ αποκτά ακόμα ένα κόμβο είτε τα $L_1$ και $L_2$ συνενώνονται σχηματίζοντας ένα νέο γραμμικό γράφημα του οποίου το πλήθος των κόμβων είναι ίσο με το πλήθος των κόμβων του $L_2$ συν ένα. Για $r > 1$ το $L_1$ είναι ένα συνηθισμένο γραμμικό γράφημα με αρχηγό, είτε ουράς είτε κεφαλής. Εάν το $L_1$ είναι το αποτέλεσμα μίας συνένωσης η οποία ακόμα εκτελείται, τότε, σύμφωνα με το Λήμμα 3, η διαδικασία αυτή τελικά θα τερματίσει και το $L_1$ θα έχει τότε έναν αρχηγό, είτε ουράς είτε κεφαλής. Τότε η μόνη αποτελεσματική αλληλεπίδραση θα είναι μεταξύ του αρχηγού του $L_1$ και κάποιου άλλου αρχηγού. Αυτή με τη σειρά της είτε προσθέτει ακόμα ένα κόμβο στο $L_1$ είτε συνενώνει το $L_1$ με κάποιο άλλο γραμμικό γράφημα, επομένως, και στις δύο περιπτώσεις κανένα γραμμικό γράφημα δε μικραίνει. $\square$

Θεωρούμε τους απομονωμένους αρχηγούς ως τετριμμένα γραμμικά γραφήματα. Επομένως, αρχικά το $G$ είναι διαμερισμένο σε $n$ τετριμμένα γραμμικά γραφήματα με σωστά επιγράμματα. Σύμφωνα με το Λήμμα 4 τα γραμμικά γραφήματα με σωστά επιγράμματα δε μικραίνουν και, σύμφωνα με το Λήμμα 3, όταν οι αρχηγοί τους αλληλεπιδρούν αυτά συνενώνονται σχηματίζοντας ένα νέο γραμμικό γράφημα που περιέχει όλους τους κόμβους τους συν τη μία επιπλέον ακμή που τα συνέδεε. Επιπρόσθετα, δεδομένου ότι υπάρχουν δύο τέτοια υπογραφήματα στην τρέχουσα φάση, υπάρχει πάντα η πιθανότητα (λόγω δικαιοσύνης) αυτά να συνενωθούν, επειδή έχουν σωστά επιγράμματα, γεγονός που συνεπάγεται ότι πάντα θα υπάρχουν ανενεργές ακμές που να συνδέουν τα άκρα αρχηγού τους ενώ δεν υπάρχει καμία άλλη πιθανή αποτελεσματική αλληλεπίδραση μεταξύ των δύο γραφημάτων. Με απλά λόγια, δύο τέτοια γραφήματα μπορούν μόνο να συνενωθούν και υπάρχει πάντα η δυνατότητα να συμβεί αυτό. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι αυτή η διαδικασία θα πρέπει τελικά, λόγω δικαιοσύνης, να τερματίσει έχοντας κατασκευάσει ένα επικαλυπτικό γραμμικό υπογράφημα του $G$ με σωστά επιγράμματα (χάριν ευκολίας καλούμε όλη αυτή τη διαδικασία *επικαλυπτική διαδικασία*). □

**Θεώρημα 6.** *Έστω ότι το γράφημα επικοινωνίας $G = (V, E)$ είναι ένα γραμμικό γράφημα $n$ πρακτόρων με σωστά επιγράμματα, όπου κάθε πράκτορας λαμβάνει το σύμβολο εισόδου του σε μία δεύτερη* συνιστώσα κατάστασης *(η πρώτη χρησιμοποιείται για τα επιγράμματα και καλείται* συνιστώσα επιγράμματος*). Τότε υπαρχει ένα ΠΠΔ $\mathcal{A}$ το οποίο όταν εκτελείται σε ένα τέτοιο γράφημα προσομοιώνει μία αιτιοκρατική ΤΜ $\mathcal{M}$ χώρου $\mathcal{O}(n)$ (γραμμικού) που υπολογίζει συμμετρικά κατηγορήματα.*

*Απόδειξη.* Το $\mathcal{A}$ εκμεταλλεύεται το γεγονός ότι το $G$ έχει σωστά επιγράμματα. Γνωρίζει ότι υπάρχει ένας μοναδικός αρχηγός στο ένα άκρο, το οποίο θα καλούμε και *αριστερό άκρο*, ο οποίος είναι είτε ένας αρχηγός κεφαλής είτε ένας αρχηγός ουράς. Επιπλέον, γνωρίζει ότι το άλλο άκρο, το *δεξί άκρο*, είναι ένας ακόλουθος ουράς και ότι όλοι οι άλλοι (εσωτερικοί) κόμβοι είναι απλοί ακόλουθοι. Όλα αυτά είναι ως προς τις συνιστώσες επιγραμμάτων του $\mathcal{A}$. Το $\mathcal{A}$ γνωρίζει επίσης ότι οι δεύτερες συνιστώσες περιέχουν αρχικά τις αρχικές καταστάσεις, οι οποίες θεωρούμε ότι είναι ίδιες με τα αντίστοιχα σύμβολα εισόδου. Ξέρει επιπρόσθετα ότι οι ακμές έχουν σωστά επιγράμματα, το οποίο συνεπάγεται ότι αυτές που ακολουθούν την κατεύθυνση του μονοπατιού απ' το άκρο αρχηγού προς το άκρο ακολούθου είναι ορθές ενώ οι υπόλοιπες είναι ανάστροφες.

Ο αρχηγός αρχίζει να προσομοιώνει την ΤΜ. Αφού η $\mathcal{M}$ υπολογίζει συμμετρικά κατηγορήματα, δίνει την ίδια έξοδο για όλες τις αντιμεταθέσεις των συμβόλων οποιασδήποτε ανάθεσης εισόδου. Απ' τις [7] και [12] γνωρίζουμε ότι εάν όλες οι ακμές ήταν ορθές τότε υπάρχει ένα ΠΠ, και συνεπώς ένα ΠΠΔ (λόγω του Λήμματος 2), που προσομοιώνει την $\mathcal{M}$. Μένει να δ.ό. η ύπαρξη ανάστροφων ακμών δεν καθιστά αδύνατη την προσομοίωση. Η εξήγηση έχει ως εξής. Υποθέστε ότι κάποιος πράκτορας $u$ έχει την κεφαλή της $\mathcal{M}$ πάνω απ' το τελευταίο σύμβολο της συνιστώσας κατάστασής του (λόγω της ιδιότητας ομοιομορφίας κάθε πράκτορας μπορεί να χρησιμοποιεί ένα σταθερό αριθμό τέτοιων συμβόλων). Τώρα, ας υποθέσουμε ότι η $\mathcal{M}$ κινεί την κεφαλή της δεξιά. Τότε ο $u$ πρέπει να μεταβιβάσει τον έλεγχο στον δεξιό του γείτονα. Για να το επιτύχει αυτό, απλώς ακολουθεί μία ορθή ακμή ως μυητής ή μία ανάστροφη ακμή ως αποκρινόμενος. Ομοίως όταν ο έλεγχος πρέπει να δοθεί αριστερά, ο πράκτορας ακολουθεί μία ανάστροφη ακμή ως μυητής ή μία ορθή ως αποκρινόμενος. Είναι εύκολο να ελέγξει κανείς ότι με τον τρόπο αυτό μπορούμε πάντα να ακολουθούμε τις σωστές κατευθύνσεις. Τέλος, το $\mathcal{A}$ μπορεί να αναγνωρίσει τα άκρα λόγω των ξεχωριστών τους επιγραμμάτων. Στην πραγματικότητα, αφού το μοντέλο ΠΠΔ μπορεί να αποθηκεύει πληροφορία και στις ακμές, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε και μία επιπλέον συνιστώσα στις ακμές ούτως ώστε να διπλασιάσουμε το διαθέσιμο χώρο (χωρίς αυτό να έχει καμία σημασία σχετικά με την ορθότητα της απόδειξης). $\square$

Θα πρέπει τώρα να είναι ξεκάθαρο ότι εάν οι πράκτορες μπορούσαν να αντιληφθούν τον τερματισμό της επικαλυπτικής διαδικασίας τότε θα μπορούσαν να προσομοιώσουν μία αιτιοκρατική TM γραμμικού χώρου που υπολογίζει συμμετρικά κατηγορήματα. Δυστυχώς όμως, δε μπορούν να αντιληφθούν τον τερματισμό, διότι αν μπορούσαν τότε θα μπορούσαμε να δ.ό. υπάρχει η δυνατότητα να αντιληφθούν τερματισμό σε κάθε μη επικαλυπτικό γραμμικό υπογράφημα που έχει κατασκευαστεί σε κάποιο ενδιάμεσο βήμα (μπορεί να αποδειχθεί με επιχειρήματα συμμετρίας σε συνδυασμό με το γεγονός ότι οι πράκτορες δε μπορούν να μετρήσουν έως το μέγεθος του πληθυσμού). Ευτυχώς, μπορούμε να ξεπεράσουμε την αδυναμία ανίχνευσης τερματισμού εφαρμόζοντας την *τεχνική επανεκκίνησης* [39].

Ξεκινάμε σκιαγραφώντας τη μεθοδολογία που θα ακολουθηθεί στο Θεώρημα 7. Γνωρίζουμε ότι όποτε συνενώνονται δύο γραμμικά υπογραφήματα με σωστά επιγράμματα, το νέο γράφημα κατασκευάζεται σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων. Επιπλέον, ο τερματισμός αυτής της διαδικασίας μπορεί να ανιχνευτεί (δείτε την απόδειξη του Λήμματος 3). Όταν ολοκληρώνεται η διαδικασία συνένωσης, ο μοναδικός αρχηγός του νέου γραμμικού γραφήματος κάνει τα ακόλουθα. Υποθέτει ότι η επικαλυπτική διαδικασία έχει ολοκληρωθεί (μία υπόθεση που είναι πιθανόν λάθος, αφού το γραμμικό υπογράφημα μπορεί να μην είναι ακόμα επικαλυπτικό) επαναφέρει τη συνιστώσα κατάστασής του στο σύμβολο εισόδου του (συνεπώς, επανεκκινεί την προσομοίωση της TM) και ενημερώνει τον δεξιό του γείτονα να κάνει το ίδιο. Η επαναφορά του συμβόλου εισόδου μπορεί να γίνει πολύ εύκολα, αφού οι πράκτορες μπορούν για πάντα να διατηρούν τα σύμβολα εισόδου τους σε μία συνιστώσα *εφεδρείας εισόδου* που είναι μόνο για ανάγνωση. Η ορθότητα αυτής της ιδέας βασίζεται στο γεγονός ότι η διαδικασία επανεκκίνησης λαμβάνει επίσης χώρα και μετά τη συνένωση των δύο τελευταίων γραμμικών υπογραφημάτων δίνοντας έτσι το τελικό επικαλυπτικό γράφημα. Αυτό που πραγματικά συμβαίνει τότε είναι ότι η προσομοίωση ξεκινάει και πάλι απ' την αρχή, σα να μην είχε εκτελεστεί ούτε μία φορά κατά τη διάρκεια της επικαλυπτικής διαδικασίας, και το Θεώρημα 6 εγγυάται ότι η προσομοίωση θα εκτελεστεί σωστά εάν δεν επανεκκινηθεί σε μελλοντικά βήματα. Ότι το τελευταίο δε θα συμβεί ποτέ προκύπτει απ' το γεγονός ότι καμία άλλη διαδικασία συνένωσης δε θα λάβει πλέον χώρα (ένα μοναδικό επικαλυπτικό υπογράφημα είναι ενεργό και όλες οι υπόλοιπες ακμές είναι ανενεργές).

**Θεώρημα 7.** *Η $SSPACE(n)$ είναι υποσύνολο της $MPS$.*

*Απόδειξη.* Πάρτε οποιοδήποτε $p \in SSPACE(n)$. Από το Θεώρημα 6 γνωρίζουμε ότι υπάρχει ένα ΠΠΔ $\mathcal{A}$ που υπολογίζει σταθερά το $p$ σε κάποιο γραμμικό γράφημα $n$ κόμβων. Πρέπει να δ.ό. υπάρχει ΣΠΠΔ $\mathcal{B}$ που υπολογίζει σταθερά το $p$. Θα κατασκευάσουμε το $\mathcal{B}$ έτσι ώστε να αποτελεί τη σύνθεση του $\mathcal{A}$ και ενός άλλου πρωτοκόλλου $\mathcal{I}$ που είναι υπεύθυνο για την επικαλυπτική διαδικασία και τη διαδικασία επανεκκίνησης.

Η κατάσταση κάθε πράκτορα αποτελείται από τρεις συνιστώσες: μία μόνο για ανάγνωση *εφεδρεία εισόδου*, μία που χρησιμοποιείται από το $\mathcal{I}$ και μία που χρησιμοποιείτα από το $\mathcal{A}$. Επομένως, τα $\mathcal{A}$ και $\mathcal{I}$ εκτελούνται, κατά μία έννοια, παράλληλα σε διαφορετικές συνιστώσες.

Το πρωτόκολλο $\mathcal{I}$ κάνει τα ακόλουθα. Εκτελεί πάντα την επικαλυπτική διαδικασία και όταν δύο γραμμικά γραφήματα συνενώνονται και η διαδικασία συνένωσης ολοκληρώνεται, εκτελεί την ακόλουθη διαδικασία επανεκκίνησης. Ο νέος αρχηγός $u$ που προέκυψε από τη συνένωση σημαδεύεται, π.χ. η κατάστασή του γίνεται $l_t^*$. Ανακαλέστε ότι το νέο γραμμικό γράφημα έχει επίσης σωστά επιγράμματα. Όταν ο $u$ συναντήσει τον δεξιό γείτονά του, τότε ο $u$ θέτει την $\mathcal{A}$ συνιστώσα του στο σύμβολο εισόδου του (αντιγράφοντάς το από την εφεδρεία), αφαιρεί το σημάδι του και το μεταβιβάζει στο γείτονά του (υπενθυμίζουμε ότι τα σωστά επιγράμματα εξασφαλίζουν ότι κάθε πράκτορας ξεχωρίζει τον αριστερό απ' τον δεξιό γείτονά του). Όταν ο νέος σημαδεμένος πράκτορας αλληλεπιδράσει με το δικό του δεξιό γείτονα κάνει τα ίδια, κ.ο.κ., έως ότου αλληλεπιδράσουν οι δύο δεξιότεροι πράκτορες· στην περίπτωση αυτή επανεκκινούνται και οι δύο ταυτόχρονα και το ειδικό σύμβολο χάνεται. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η διαδικασία αυτή εξασφαλίζει ότι όλοι οι πράκτορες στο γραμμικό γράφημα επανεκκινούνται και ότι πριν την ολοκλήρωση αυτής της διαδικασίας οι πράκτορες που δεν έχουν ακόμα επανεκκινηθεί δε μπορούν να έχουν αποτελεσματικές αλληλεπιδράσεις με αυτούς που έχουν επανεκκινηθεί (ο ειδικά σημαδεμένος πράκτορας λειτουργεί πάντα ως ο διαχωριστής μεταξύ των δύο ειδών πρακτόρων). Παρατηρήστε ότι εάν εκκρεμούν άλλες διαδικασίες επανεκκίνησης από προηγούμενα βήματα, τότε η νέα διαδικασία της εξαλείφει. Αυτό μπορεί να γίνει εύκολα επειδή το νέο σήμα επανεκκίνησης θα κινείται πάντα από τα αριστερά προς τα δεξιά και έτσι όλα τα παλιά σήματα θα βρίσκονται στα δεξιά του· έτσι γνωρίζουμε ποια πρέπει να διαγραφούν. Μία εναλλακτική προσέγγιση είναι να εμποδίσουμε τον αρχηγό να συμμετάσχει σε νέες διαδικασίες συνένωσης πριν την ολοκλήρωση της τρέχουσας διαδικασίας επανεκκίνησης. Αυτή η προσέγγιση είναι επίσης σωστή: η δικαιοσύνη εγγυάται ότι η διαδικασία επανεκκίνησης θα τερματίσει σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων, επομένως, η διαδικασία συνένωσης δε μπορεί να παρεμποδιστεί για πάντα.

Από το Θεώρημα 5 γνωρίζουμε ότι η επικαλυπτική διαδικασία που εκτελείται από το $\mathcal{I}$ έχει ως αποτέλεσμα το σχηματισμό ενός επικαλυπτικού γραμμικού υπογραφήματος του $G$ με σωστά επιγράμματα. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, η επικαλυπτική διαδικασία τερματίζει όταν λαμβάνει χώρα η διαδικασία συνένωσης των δύο τελευταίων γραμμικών υπογραφημάτων και η τελευταία διαδικασία επίσης τερματίζει επιτυχώς σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων (Λήμμα 3). Επιπλέον, από την παραπάνω συζήτηση γνωρίζουμε ότι, όταν συμβεί αυτό, η διαδικασία επανεκκίνησης θα επανεκκινήσει επιτυχώς όλους τους πράκτορες. Όμως τότε, ανεξαρτήτως του μέχρι τώρα υπολογισμού του (στη δικιά του συνιστώσα), το $\mathcal{A}$ θα εκτελεστεί από την αρχή σε ένα γραμμικό γράφημα $n$ κόμβων με σωστά επιγράμματα (το οποίο γράφημα δε θα επανατροποποιηθεί στο μέλλον), επομένως θα υπολογίσει σταθερά το $p$. Τέλος, αν υποθέσουμε ότι η έξοδος του $\mathcal{B}$ είναι η έξοδος του $\mathcal{A}$, τότε καταλήγουμε στο ότι και το ΣΠΠΔ $\mathcal{B}$ υπολογίζει σταθερά το $p$, άρα έχουμε ότι $p \in MPS$. Δείτε το Σχήμα 2.3 για ένα γραφικό παράδειγμα βηματικής εκτέλεσης.

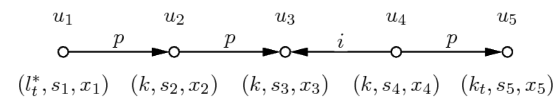
$\square$

### 2.3.3 Ένας Ακριβής Χαρακτηρισμός: $MPS = SNSPACE(n^2)$

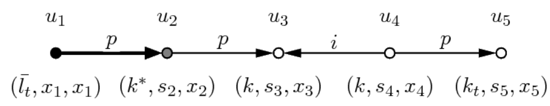
Εδώ επεκτείνουμε τις ιδέες που αναπτύχθηκαν στην Ενότητα 2.3.2 ούτως ώστε να καθιερώσουμε ότι η $SSPACE(n^2)$ είναι υποσύνολο της $MPS$ πράγμα που θα σημαίνει ότι η $MPS$ είναι μία εκπληκτικά ευρεία κλάση. Τέλος, θα βελτιώσουμε σε $SNSPACE(n^2)$ και θα δ.ό. ο τελευταίος εγκλεισμός ισχύει με ισότητα, επομένως θα φτάσουμε στον ακόλουθο ακριβή χαρακτηρισμό για την $MPS$: *Ένα κατηγόρημα ανήκει στην $MPS$ ανν είναι συμμετρικό και ανήκει στην $NSPACE(n^2)$.*

Δίνουμε πρώτα την αποδεικτική ιδέα προς διευκόλυνση του αναγνώστη.

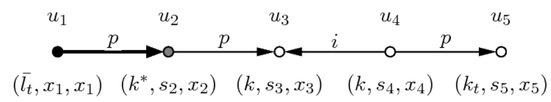
*Αποδεικτική Ιδέα.* Το αναγκαίο των συνθηκών είναι σχετικά εύκολο. Κάθε κατηγόρημα στην $MPS$ είναι προφανώς συμμετρικό και επιπλέον μπορούμε σε χώρο $\mathcal{O}(n^2)$ να



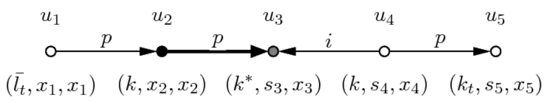

(α′) Αμέσως μετά τη συνένωση. Το άκρο αρχηγού έχει το ειδικό σύμβολο αστεριού. Η διαδικασία επανεκκίνησης ξεκινάει.




(β′) Ο $u_1$ επανεκκινείται και ο $u_2$ αποκτά το σημάδι αστέρι. Παρατηρήστε ότι η πρώτη συνιστώσα του $u_1$ αποκτά ένα σημάδι παύλα το οποίο εμποδίζει τον $u_1$ να συμμετάσχει σε ακόμα μία διαδικασία συνένωσης.

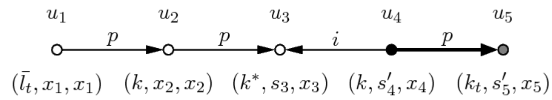



(γ′) Δε συμβαίνει τίποτα αφού μόνο ο $u_1$ έχει επανεκκινηθεί (ο $u_2$ έχει ακόμα το σημάδι αστέρι).

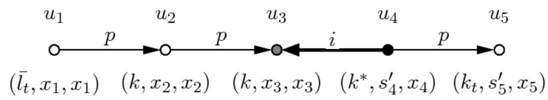



(δ′) Ο $u_2$ επανεκκινείται και μεταβιβάζει το σημάδι στον $u_3$.

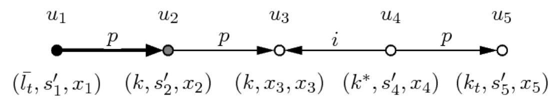
Σχήμα 2.3. Ένα παράδειγμα της διαδικασίας επανεκκίνησης αμέσως μετά τη συνένωση δύο γραμμικών γραφημάτων. Οι πράκτορες έχουν τα ονόματα $(u_1, u_2, \ldots, u_5)$. Η κατάσταση κάθε πράκτορα είναι ένα 3-διάνυσμα $(c_1, c_2, c_3)$ όπου η συνιστώσα $c_1$ περιέχει το επίγραμμα του πράκτορα, η $c_2$ την κατάσταση της προσομοιούμενης TM, και η $c_3$ την εφεδρεία εισόδου. Οι έντονες ακμές επισημαίνουν το ζεύγος που έχει μόλις αλληλεπιδράσει. Ο μαύρος πράκτορας είναι ο μυητής και ο γκρι ο αποκρινόμενος. Οι καταστάσεις των αντίστοιχων πρακτόρων ανανεώνονται σε κάθε σχήμα σύμφωνα με τις προηγούμενες καταστάσεις τους και την προηγούμενη κατάσταση της ακμής μέσω της οποίας αλληλεπιδρούν (συνεχίζεται στην επόμενη σελίδα).



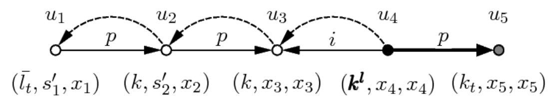

(ε′) Ούτε ο $u_4$ ούτε ο $u_5$ ακόμα επανεκκινηθεί. Ένα βήμα της προσομοίωσης εκτελείται, αλλά αυτό δεν έχει ιδαίτερη σημασία αφού τόσο ο $u_4$ όσο και ο $u_5$ θα επανεκκινηθούν σε μελλοντικά βήματα και δε μπορούν να επικοινωνούν με πράκτορες που έχουν επανεκκινηθεί (το σημάδι αστέρι λειτουργεί ως διαχωριστής).



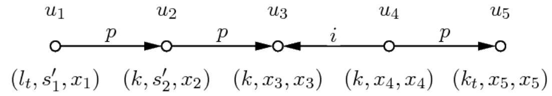

(ϛ′) Ο $u_3$ επανεκκινείται και μεταβιβάζει το σημάδι στον $u_4$.




(ζ′) Ένα βήμα της προσομοίωσης εκτελείται φυσιολογικά, αφού και οι δύο έχουν επανεκκινηθεί.




(η′) Και οι δύο επανεκκινούνται και ο $u_4$ περνάει στην $k^l$. Το σημάδι '$l$' (''αριστερό'') θα ταξιδέψει προς τον $u_1$ για να αφαιρέσει το σημάδι του και να σημάνει το τέλος της διαδικασίας επανεκκίνησης.




(θ′) Μετά την ολοκλήρωση της διαδικασίας επανεκκίνησης. Ο αρχηγός είναι και πάλι έτοιμος για συνένωση.

Σχήμα 2.3. Ένα παράδειγμα της διαδικασίας επανεκκίνησης αμέσως μετά τη συνένωση δύο γραμμικών γραφημάτων.

εκτελέσουμε μία ανταιτιοκρατική αναζήτηση στο γράφημα μεταβάσεων του ΣΠΠΔ που υπολογίζει σταθερά το κατηγόρημα.

Το επαρκές είναι κάπως πιο περίπλοκο. Πρέπει να δ.ό. για όλες τις συμμετρικές γλώσσες $L \in NSPACE(n^2)$ υπάρχει ένα ΣΠΠΔ που υπολογίζει σταθερά το κατηγόρημα $p_L$, που ορίζεται ως $p_L(x) = 1$ ανν $x \in L$. Έχουμε ήδη δείξει στο Λήμμα 1 ότι το $p_L$ είναι συμετρικό ανν η $L$ είναι συμμετρική. Και εδώ η βασική ιδέα είναι να οργανώσουμε τους πράκτορες σε ένα επικαλυπτικό γραμμικό υπογράφημα του γραφήματος επικοινωνίας. Για να επιτευχθεί αυτό, οι πράκτορες ξεκινούν να διαμορφώνουν μικρά γραμικά γραφήματα που στη συνέχεια συνενώνονται και επεκτείνονται προς απομονωμένους κόμβους. Με την ολοκλήρωση αυτής της διαδικασίας, οι ακμές του επικαλυπτικού γραμμικού γραφήματος θα είναι ενεργές και οι υπόλοιπες $\mathcal{O}(n^2)$ ακμές θα είναι ανενεργές. Τώρα το δίκτυο μπορεί να λειτουργήσει ως μία TM χώρου $\mathcal{O}(n^2)$ χρησιμοποιώντας τους πράκτορες ως μονάδες ελέγχου και τις ανενεργές ακμές ως κελιά. Όποτε οι ανενεργές ακμές κάποιου πράκτορα εξαντλούνται, ο πράκτορας μεταβιβάζει τον έλεγχο (μέσω μίας ενεργής ακμής) σε κάποιο γείτονά του στο επικαλυπτικό γραμμικό γράφημα. Εκμεταλλευόμενοι επιπλέον την εγγενή ανταιτιοκρατία του προτύπου αλληλεπιδράσεων, οι πράκτορες μπορούν να προσομοιώσουν την ανταιτιοκρατική TM που διαγιγνώσκει την $L$. Παρατηρήστε ότι, αφού οι πράκτορες δε μπορούν να ανιχνεύσουν τον τερματισμό της επικαλυπτικής διαδικασίας, κάθε φορά που αλλάζει η δομή επανεκκινούν τον υπολογισμό τους με ένα συστηματικό τρόπο, έτσι ώστε οι πράκτορες που έχουν επανεκκινηθεί να μη μπορούν να επικοινωνήσουν με πράκτορες που δεν έχουν ακόμα επανεκκινηθεί, χρησιμοποιώντας μία εφεδρεία της εισόδου τους που διατηρείται καθ' όλη τη διάρκεια του υπολογισμού. Η τελική επανεκκίνηση λαμβάνει χώρα όταν σχηματιστεί το επικαλυπτικό γραμμικό γράφημα και τότε η προσομοίωση εκτελείται ομαλά. □

**Θεώρημα 8.** *Υποθέστε ότι το πλήρες γράφημα επικοινωνίας $G = (V, E)$ περιέχει ένα επικαλυπτικό γραμμικό υπογράφημα με σωστά επιγράμματα, όπου κάθε πράκτορας λαμβάνει το σύμβολο εισόδου του σε μία δεύτερη* συνιστώσα κατάστασης. *Τότε υπάρχει* *ένα ΠΠΔ $\mathcal{A}$ που όταν τρέχει σε ένα τέτοιο γράφημα προσομοιώνει μία αιτιοκρατική ΤΜ $\mathcal{M}$ χώρου $\mathcal{O}(n^2)$ που υπολογίζει συμμετρικά κατηγορήματα.*

*Απόδειξη.* Χάριν ευκολίας και χ.β.τ.γ. υποθέτουμε ότι το $\mathcal{A}$ ξεκινάει την εκτέλεσή του από το άκρο αρχηγού και ότι αρχικά η προσομοίωση μετακινεί και τα $n$ σύμβολα εισόδου στις αριστερότερες εξερχόμενες ανενεργές ακμές ($n-2$ εξέρχονται του αρχηγού και δύο ακόμα εξέρχονται του δεύτερου πράκτορα στο γραμμικό υπογράφημα). Θεωρήστε χ.β.τ.γ. ότι το αριστερό άκρο είναι ένας αρχηγός ουράς και το δεξιό ένας ακόλουθος ουράς. Κάθε πράκτορας μπορεί να ξεχωρίσει τους γείτονές του στο γραμμικό γράφημα απ' τους υπόλοιπους γείτονές του (και επιπλέον ξέρει ποιος είναι ο αριστερός και ποιος ο δεξιός), αφού με τους τελευταίους συνδέεται μέσω ανενεργών ακμών. Επιπλέον, τα άκρα του γραμμικού γραφήματος μπορούν να αναγνωριστούν επειδή το γραμμικό γράφημα έχει σωστά επιγράμματα (το ένα άκρο είναι αρχηγός, το άλλο ακόλουθος ουράς και οι υπόλοιποι πράκτορες ακόλουθοι). Τέλος, υποθέτουμε ότι οι καταστάσεις των ακμών αποτελούνται από δύο συνιστώσες· η μία χρησιμοποιείται για να χαρακτηρίζονται ως ενεργές ή ανενεργές και η άλλη χρησιμοποιείται από την προσομοίωση.

Σε αντίθεση με το Θεώρημα 6, εδώ η προσομοίωση χρησιμοποιεί και τις ανενεργές ακμές. Ο εκάστοτε πράκτορας που ελέγχει την προσομοίωση βρίσκεται σε μία ειδική κατάσταση για την οποία χρησιμοποιείται το σημάδι '$*$'. Αφού η προσομοίωση ξεκινάει από το αριστερό άκρο (αρχηγός ουράς), η κατάστασή του θα είναι η $l_t^*$. Όταν ο αρχηγός με το σημάδι αστέρι αλληλεπιδράσει με τον μοναδικό δεξιό του γείτονα στο γραμμικό γράφημα, η κατάσταση του γείτονα ανανεώνεται σε μία κατάσταση με σημάδι $r$ (δηλαδή, $k^r$). Εν συνεχεία, ο πράκτορας $k^r$ αλληλεπιδρά με τον δικό του δεξιό γείτονα, ο οποίος δεν είναι σημαδεμένος, και ο γείτονας ανανεώνει την κατάστασή του σε μία ειδική κατάσταση με σημάδι τελεία (δηλαδή, $\dot{k}$) ενώ ο άλλος πράκτορας πηγαίνει στην $k$. Τώρα η μόνη αποτελεσματική αλληλεπίδραση που μπορεί να λάβει χώρα είναι μεταξύ του αρχηγού με το αστέρι ($l_t^*$) ως μυητή και του ακολούθου με την τελεία ($\dot{k}$) ως αποκρινόμενου, η οποία μπορεί να συμβεί μόνο μέσω της αντίστοιχης ανενεργής ακμής που τους συνδέει. Με τον τρόπο αυτό, η συνιστώσα της κατάστασης της ακμής που χρησιμοποιείται για την προσομοίωση γίνεται μέρος της ταινίας της TM. Στην πραγματικότητα, η ταινία της $\mathcal{M}$ αποτελείται μόνο από τις ανενεργές ακμές και η προσπέλασή της γίνεται με ένα συστηματικό τρόπο που περιγράφεται στη συνέχεια.

Εάν η προσομοίωση πρέπει να συνεχίσει προς τα δεξιά, η αλληλεπίδραση $(l_t^*, \dot{k})$ τροποποιεί την κατάσταση του πράκτορα με την τελεία σε $k^r$. Εάν πρέπει να συνεχίσει προς τ' αριστερά την κάνει $k^l$. Ένας πράκτορας στην κατάσταση $k^r$ αλληλεπιδρά με τον δεξιό του γείτονα βάζοντάς του μία τελεία ενώ ένας πράκτορας στην $k^l$ κάνει το ίδιο στον αριστερό του γείτονα. Με τον τρόπο αυτό, η τελεία κινείται αριστερά και δεξιά μεταξύ των πρακτόρων ακολουθώντας τις ενεργές ακμές. Η θέση της τελείας στο γραμμικό γράφημα καθορίζει το ποια εξερχόμενη ανενεργή ακμή του $l_t^*$ θα χρησιμοποιηθεί για την προσομοίωση. Η ακολουθία σύμφωνα με την οποία η τελεία διασχίζει το γράφημα καθορίζει την ακολουθία με την οποία ο $l_t^*$ επισκέπτεται τις εξερχόμενες ανενεργές ακμές του. Επομένως, εάν πρέπει να συνεχίσει στην επόμενη ανενεργή μετακινεί την τελεία δεξιά (μέσω μίας κατάστασης $k^r$) ενώ αν πρέπει να συνεχίσει στην προηγούμενη μετακινεί την τελεία αριστερά (μέσω μίας κατάστασης $k^l$). Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι ο εκάστοτε πράκτορας που έχει την τελεία παίζει το ρόλο της κεφαλής της TM, αφού δείχνει την ακμή (η οποία αντιστοιχεί σε κάποιο κελί της $\mathcal{M}$) στην οποία θα συνεχίσει η προσομοίωση. Όπως ήδη αναφέρθηκε, μόνο οι ανενεργές ακμές κρατούν τα περιεχόμενα της ταινίας της TM. Οι ενεργές χρησιμοποιούνται για να επιτρέπουν στις ειδικές καταστάσεις να διασχίζουν το γραμμικό γράφημα.

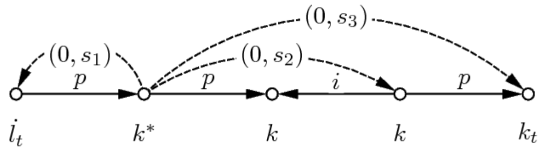
Θεωρήστε την περίπτωση κατά την οποία η τελεία φτάνει στον ακόλουθο ουράς ($k_t$) και η προσομοίωση μετά την αλληλεπίδραση $(l_t^*, \dot{k}_t)$ λέει "δεξιά". Αφού η προσομοίωση έχει επισκεφθεί όλες τις εξερχόμενες του $l_t^*$, ο έλεγχος πρέπει να μεταβιβαστεί στον επόμενο πράκτορα του γραμμικού γραφήματος (ο δεξιός γείτονας του $l_t$). Αυτό επιτυγχάνεται δημιουργώντας μία ακόμα ειδική κατάσταση που κινείται από το δεξί άκρο προς τ' αριστερά μέχρι να συναντήσει τον $l_t^*$. Τότε του αφαιρεί το αστέρι και το αναθέτει στον επόμενο πράκτορα, ο οποίος έχει τώρα τον έλεγχο της προσομοίωσης και θα επισκεφθεί τις δικές του εξερχόμενες ανενεργές ακμές. Παρόμοια διαδικασία λαμβάνει χώρα όταν ενώ η προσομοίωση ελέγχεται από οποιονδήποτε ακόλουθο, φτάσει στο αριστερό άκρο (αρχηγού) και ζητήσει να συνεχίσει αριστερά.

Όταν ο έλεγχος της προσομοίωσης φτάσει σε έναν ακόλουθο, τότε αυτός για να επισκεφθεί την πρώτη του ακμή τοποθετεί την τελεία στο αριστερό άκρο (αρχηγού), εν συνεχεία στον επόμενο πράκτορα από τ' αριστερά κ.ο.κ. Εάν η τελεία φτάσει στον ίδιο (που έχει το αστέρι) τότε αυτός απλώς τη μεταβιβάζει προς τα δεξία (προσπερνώντας τον εαυτό του) στον επόμενο πράκτορα προς τον οποίο έχει εξερχόμενη ανενεργή ακμή (προσέξτε ότι η μεταβίβαση της τελείας γίνεται πάντα μέσω ενεργών ακμών). Με τον τρόπο αυτό, κάθε πράκτορας επισκέπτεται τις εξερχόμενες ακμές του με μία συγκεκριμένη σειρά, η οποία υποδεικνύεται από την προσομοιούμενη TM. Έτσι παρέχεται ο $\mathcal{O}(n^2)$ χώρος που χρειάζεται η προσομοίωση. Στο Σχήμα 2.4 παρουσιάζεται ένα γραφικό παράδειγμα.

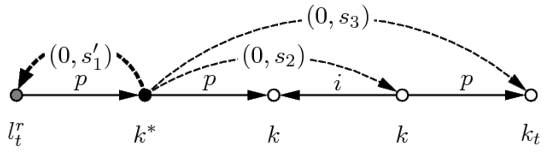
Παρατηρήστε πως η υπόθεση ότι μόνο οι ανενεργές ακμές χρησιμοποιούνται από την προσομοίωση ως κελιά της $\mathcal{M}$ δεν είναι περιοριστική. Ο μηχανισμός που μόλις περιγράψαμε μπορεί να επεκταθεί ούτως ώστε να χρησιμοποιεί ως κελιά τόσο τις ενεργές ακμές όσο και τους πράκτορες. Σε κάθε περίπτωση, οι ανενεργές ακμές των πρακτόρων είναι ασυμπτωτικά επαρκείς. □

**Θεώρημα 9.** *Η $SSPACE(n^2)$ είναι υποσύνολο της $MPS$.*

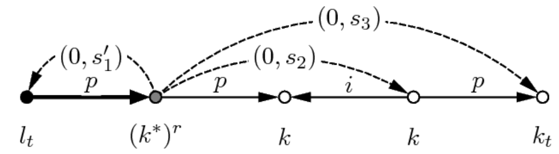
*Απόδειξη.* Η βασική ιδέα είναι παρόμοια με εκείνη της απόδειξης του Θεωρήματος 7 (βασίζεται και αυτή στην τεχνική επανεκκίνησης). Υποθέτουμε ότι οι καταστάσεις των ακμών αποτελούνται από δύο συνιστώσες· η μία χρησιμοποιείται για να χαρακτηρίζονται ως ενεργές ή ανενεργές και η άλλη χρησιμοποιείται από την προσομοίωση (πρωτόκολλο $\mathcal{A}$ του Θεωρήματος 8).



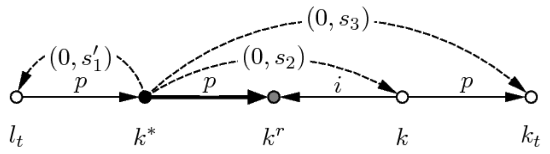

(α′) Ο πράκτορας στην $k^*$ ελέγχει τώρα την προσομοίωση.




(β′) Ένα βήμα της προσομοίωσης εκτελείται στην ανενεργή ακμή. Η ΤΜ λέει "δεξιά" και ο $k^*$ πρέπει να τρέξει τώρα την προσομοίωση στην πρώτη ανενεργή ακμή π

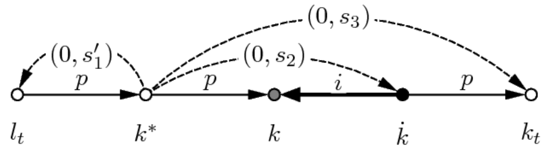



(γ′) Το σημάδι $r$ ταξιδεύει προς τα δεξιά μέχρι να συναντήσει τον πρώτο πράκτορα που έχει ανενεργή εισερχόμενη ακμή από τον $k^*$.

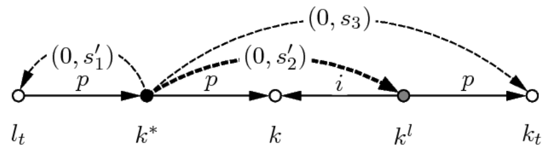



(δ′) Το σημάδι ακόμα ταξιδεύει.

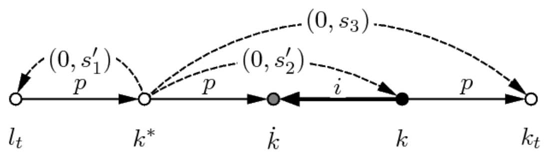
Σχήμα 2.4. Ένα παράδειγμα προσομοίωσης μίας αιτιοκρατικής ΤΜ χώρου $\mathcal{O}(n^2)$. Η προσομοίωση εκτελείται στις δεύτερες συνιστώσες (κατάστασης) των ανενεργών ακμών (αυτές των οποίων οι πρώτες συνιστώσες είναι 0). Οι έντονες ακμές επισημαίνουν το ζεύγος που έχει μόλις αλληλεπιδράσει. Ο μαύρος πράκτορας είναι ο μυητής και ο γκρι ο αποκρινόμενος. Οι καταστάσεις των αντίστοιχων πρακτόρων ανανεώνονται σε κάθε σχήμα σύμφωνα με τις προηγούμενες καταστάσεις τους και την προηγούμενη κατάσταση της ακμής μέσω της οποίας αλληλεπιδρούν. Παρουσιάζουμε μόνο τις αποτελεσματικές αλληλεπιδράσεις· είναι πιθανόν μεταξύ δύο συνεχόμενων σχημάτων να λαμβάνει χώρα οποιοσδήποτε πεπερασμένος αριθμός αναποτελεσματικών αλληλεπιδράσεων. Η δικαιοσύνη εξασφαλίζει ότι μία αποτελεσματική αλληλεπίδραση που μπορεί πάντα να συμβεί τελικά θα συμβεί (συνεχίζεται στην επόμενη σελίδα).



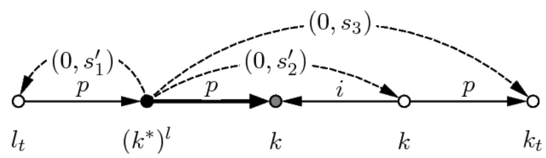

(ε′) Ο ζητούμενος πράκτορας βρέθηκε. Το ειδικό σημάδι τελεία θα κάνει την προσομοίωση να τρέξει στην επόμενη ανενεργή ακμή.



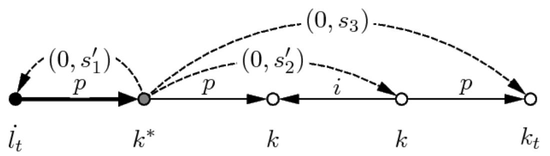

(ϛ′) Ένα βήμα της προσομοίωσης εκτελείται. Η ΤΜ λέει ‘‘αριστερά’’ και η προσομοίωση πρέπει και πάλι να χρησιμοποιήσει την προηγούμενη ανενεργή ακμή.



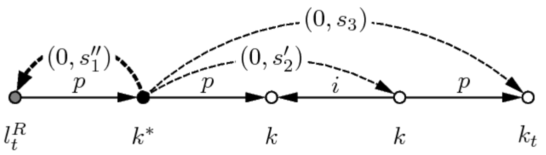

(ζ′) Το σημάδι τελεία τοποθετείται σε λάθος πράκτορα (η προσομοίωση χρησιμοποιεί μόνο τις ανενεργές εξερχόμενες του $k^*$).




(η′) Το σφάλμα ανιχνεύεται αφού η αλληλεπίδραση λαμβάνει χώρα μέσω ενεργής ακμής. Το σημάδι $l$ συνεχίζει το ταξίδι του προς τ’ αριστερά.

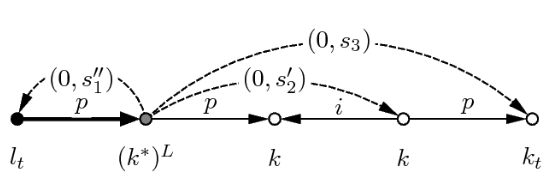



(ϑ′) Το σημάδι τελεία τοποθετείται στο άκρο αρχηγού.

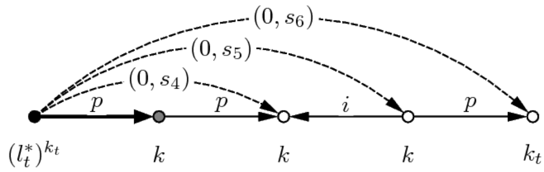



(ι′) Ένα βήμα της προσομοίωσης εκτελείται. Η ΤΜ λέει πάλι ‘‘αριστερά’’ αλλά είναι ήδη στον αριστερότερο πράκτορα. Δημιουργείται ένα ειδικό σημάδι $R$ για να αλλάξει τον πράκτορα που ελέγχει την προσομοίωση.

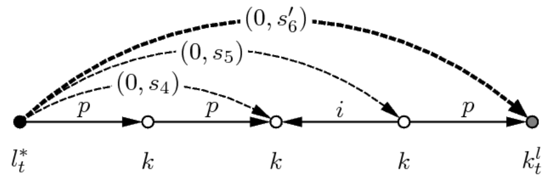
Σχήμα 2.4. Ένα παράδειγμα προσομοίωσης μίας αιτιοκρατικής ΤΜ χώρου $\mathcal{O}(n^2)$ (συνεχίζεται στην επόμενη σελίδα).



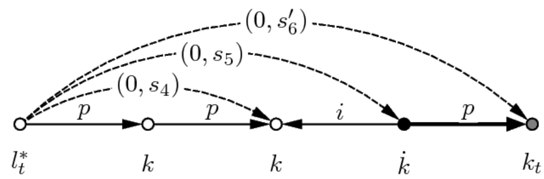

(ια′) Ανιχνεύτηκε ο πράκτορας που ελέγχει την προσομοίωση. Το σημάδι $L$ θα μεταβιβάσει τον έλεγχο στον αριστερό γείτονα.



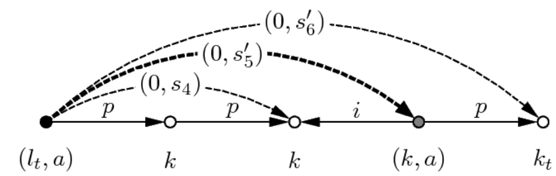

(ιβ′) Το σημάδι αστέρι μεταβιβάστηκε στα αριστερά. Το αριστερό άκρο ελέγχει τώρα την προσομοίωση και θα χρησιμοποιήσει τις δικές του ανενεργές εξερχόμενες ακμές. Το σημάδι $k_t$ υποδεινύει ότι θα πρέπει να συνεχίσει απ' την τελευταία εξερχόμενη ακμή του (παίζει το ρόλο ενός τεχνητού σημαδιού τελεία πάνω απ' το άκρο ακολούθου.



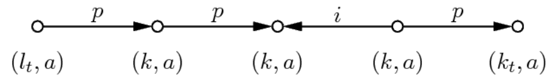

(ιγ′) Εκτελείται ένα βήμα της προσομοίωσης. Η ΤΜ λέει πάλι ‘‘αριστερά’’.




(ιδ′) Το σημάδι τελεία μεταβιβάστηκε αριστερά.




(ιε′) Εκτελείται ένα βήμα της προσομοίωσης. Η ΤΜ αποδέχεται και μία αποδεκτική συνιστώσα δημιουργείται και στους δύο πράκτορες.




(ιϛ′) Η αποδεκτική συνιστώσα διαδίδεται σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων (λόγω δικαιοσύνης) σε όλους τους πράκτορες και ο πληθυσμός αποδέχεται.

Σχήμα 2.4. Ένα παράδειγμα προσομοίωσης μίας αιτιοκρατικής ΤΜ χώρου $\mathcal{O}(n^2)$.

Αυτή τη φορά, η διαδικασία επανεκκίνησης προσπαθεί να επανεκκινήσει όχι μόνο τους πράκτορες ενός γραμμικού γραφήματος αλλά και όλες τις εξερχόμενες ανενεργές ακμές τους. Ξεκινάμε περιγράφοντας διεξοδικά τη διαδικασία επανεκκίνησης. Όποτε τερματίζει η διαδικασία συνένωσης δύο γραμμικών γραφημάτων, δίνοντας ένα νέο γραμμικό γράφημα $L$, το ακραίο σημείο αρχηγού του $L$ περνάει σε μία ειδική *φραγμένη* κατάσταση, έστω $l^b$, που εμποδίζει το $L$ να συνενωθεί με κάποιο άλλο γράφημα όσο η διαδικασία επανεκκίνησης εκτελείται. Το $L$ θα γίνει και πάλι έτοιμο για συνένωση μόλις ολοκληρωθεί η διαδικασία επανεκκίνησης. Αλληλεπιδρώντας με το δεξιό του γείτονα που βρίσκεται στην $k$ μέσω ενενεργής ακμής, ο $l^b$ διαδίδει τη φραγμένη κατάσταση στον γείτονά του (δηλαδή τον κάνει $k^b$) και τον επανεκκινεί. Η φραγμένη κατάσταση διαδίδεται με τον ίδιο τρόπο από τ' αριστερά προς τα δεξιά (προς τον ακόλουθο ουράς) επανεκκινώντας όλους τους ενδιάμεσους ακολούθους και κάνοντας την κατάστασή τους $k^b$. Όταν φτάσει στο άκρο, δημιουργείται μία νέα ειδική κατάσταση $k_0$, η οποία διασχίζει το $L$ προς την αντίστροφη κατεύθυνση. Όταν η $k_0$ φτάσει στο άκρο αρχηγού, εξαλείφεται και ο αρχηγός ανανεώνει την κατάστασή του σε $l^*$.

Τώρα ξεκινάει η επανεκκίνηση των ανενεργών ακμών. Όταν ο αρχηγός που βρίσκεται στην $l^*$ αλληλεπιδράσει με τον δεξιό του γείτονα στο γραμμικό γράφημα, ανανεώνει την κατάσταση του γείτονά του σε μία ειδική κατάσταση παύλα, π.χ. $\bar{k}$. Όταν ο πράκτορας με την παύλα αλληλεπιδράσει με τον δικό του δεξιό γείτονα, ο οποίος δεν είναι σημαδεμένος, η κατάσταση του γείτονα παίρνει μία τελεία, π.χ. $\dot{k}$. Τώρα οι παύλες δε μπορούν να διαδοθούν και η μοναδική αποτελεσματική αλληλεπίδραση είναι μεταξύ του αρχηγού με το αστέρι και του ακολούθου με την τελεία. Η αλληλεπίδραση αυτή επανεκκινεί τη συνιστώσα κατάστασης της ακμής που χρησιμοποιείται για την προσομοίωση και μετατρέπει την κατάσταση του αποκρινόμενου ακολούθου σε $\bar{k}$. Έπειτα, αυτός δίνει την τελεία στον δεξιό του γείτονα, η δεύτερη εξερχόμενη ακμή του αρχηγού επανεκκινείται με αυτό τον τρόπο κ.ο.κ. μέχρις ότου αρχικοποιηθεί και η τελευταία εξερχόμενη του αρχηγού (αυτή που τον συνδέει με το άλλο άκρο του γραμμικού γραφήματος). Αυτό που συμβαίνει τότε είναι ότι οι παύλες διαγράφονται η μία μετά την άλλη από δεξιά προς τ' αριστερά (θυμηθείτε ότι όλες οι εξερχόμενες του αρχηγού έχουν επανεκκινηθεί) και τέλος το αστέρι κινείται ένα βήμα προς τα δεξιά. Ο πρώτος ακόλουθος έχει τώρα το αστέρι και επανεκκινεί τις δικές του εξερχόμενες από τ' αριστερά προς τα δεξιά με παρόμοιο τρόπο. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται μέχρι το δεξί άκρο του $L$ να επανεκκινήσει όλες τις εξερχόμενες ακμές του. Μόλις συμβει αυτό, το $\mathcal{A}$ θα εκτελέσει την προσομοίωσή του στις σωστές επανεκκινημένες καταστάσεις. Παρότι είναι ξεκάθαρο ότι η διαδικασία που μόλις περιγράψαμε εκτελείται σωστά όταν το $L$ είναι επικαλυπτικό, επειδή όλες οι εξερχόμενες ακμές έχουν τις κεφαλές τους πάνω στο γραμμικό γράφημα, δεν είναι τόσο σαφές ότι τερματίζει σωστά όταν το $L$ δεν είναι επικαλυπτικό. Ο λόγος είναι ότι στην τελευταία περίπτωση θα υπάρχουν πάντα ανενεργές ακμές μεταξύ πρακτόρων του $L$ και πρακτόρων κάποιου άλλου γραμμικού υπογραφήματος $L'$. Είναι κρίσιμο να αποδείξουμε ότι κανένα πρόβλημα δε θα ανακύψει, διαφορετικά υπάρχει ο κίνδυνος να μην τερματίσει ποτέ η διαδικασία επανεκκίνησης του $L$. Αυτό θα καθιστούσε την επικαλυπτική διαδικασία ανίκανη να συνενώσει το $L$ με κάποιο άλλο γραμμικό γράφημα και έτσι δε θα σχηματιζόταν ποτέ επικαλυπτικό γράφημα.

**Λήμμα 5.** *Έστω $L$ και $L'$ δύο ξένα γραμμικά υπογραφήματα του $G$ και υποθέστε ότι το $L$ τρέχει μία διαδικασία επανεκκίνησης. Η διαδικασία τερματίζει πάντα σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων.*

*Απόδειξη.* Εάν το $L'$ δεν τρέχει διαδιακασία επανεκκίνησης τότε δε μπορεί να υπάρξει σύγκρουση μεταξύ των $L$ και $L'$. Ο λόγος είναι ότι η διαδικασία επανεκκίνησης έχει κάποια αποτελεσματική αλληλεπίδραση μέσω μίας ανενεργής ακμής μόνο όταν η ουρά της ακμής βρίσκεται στην κατάσταση αστέρι και η κεφαλή της στην κατάσταση τελεία. Όμως αυτές οι καταστάσεις μπορούν να εμφανιστούν σε ένα γραμμικό γράφημα μόνο ενώ αυτό εκτελεί μία διαδικασία επανεκκίνησης. Επομένως, στην περίπτωση αυτή η διαδικασία επανεκκίνησης του $L$ θα εκτελεστεί σαν να μην υπήρχε το $L'$.

Εάν το $L'$ τρέχει επίσης μία διαδικασία επανεκκίνησης, τότε υπάρχουν δύο πιθανές συγκρούσεις:

1. *Ένας πράκτορας αστέρι του $L$ αλληλεπιδρά με έναν πράκτορα τελεία του $L'$*: Σε αυτή την περίπτωση, ο πράκτορας τελεία του $L'$ γίνεται απλώς ένας ακόλουθος με παύλα, και ο πράκτορας αστέρι του $L$ διατηρεί την κατάστασή του. Επομένως, η διαδικασία επανεκκίνησης του $L$ δεν επηρεάζεται.

2. *Ένας πράκτορας αστέρι του $L'$ αλληλεπιδρά με έναν πράκτορα τελεία του $L$*: Τώρα συμβαίνει το αντίθετο και η διαδικασία επανεκκίνησης του $L$ σαφώς επηρεάζεται. Αυτό όμως που πραγματικά συμβαίνει είναι ότι ο πράκτορας τελεία του $L$ γίνεται ακόλουθος με παύλα μέσω μίας λάθους αλληλεπίδρασης. Όμως αυτό δεν καθυστερεί την πρόοδο της διαδικασίας επανεκκίνησης· απλώς προοδεύει ένα βήμα χωρίς να επανεκκινεί τη σωστή ακμή.

Στην πρώτη περίπτωση η διαδικασία δεν επηρεάζεται καθόλου και στη δεύτερη η διαδικασία δεν καθυστερεί (απλώς προοδεύει κάποια βήματα χωρίς να επανεκκινεί τις κατάλληλες ακμές), επομένως, τερματίζει πάντα σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων (λόγω της δικαιοσύνης και λαμβάνοντας υπ' όψιν τη συζήτηση που προηγήθηκε του λήμματος) και το $L$ θα συμμετάσχει σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων σε ακόμα μία διαδικασία συνένωσης. $\square$

Το Λήμμα 5 εξασφαλίζει ότι η επικαλυπτική διαδικασία τερματίζει έχοντας κατασκευάσει ένα επικαλυπτικό γραμμικό υπογράφημα με ενεργές ακμές, ενώ όλες οι υπόλοιπες ακμές του $G$ είναι ανενεργές. Στην περίπτωση αυτή, αφού υπάρχει ένα μοναδικό γραμμικό υπογράφημα (το επικαλυπτικό), δε μπορεί να υπάρξει καμία σύγκρουση και πρέπει να είναι σαφές ότι όλοι οι πράκτορες και όλες οι ακμές θα επανεκκινηθούν σωστά. Όταν η τελευταία διαδικασία επανεκκίνησης ολοκληρωθεί, το πρωτόκολλο $\mathcal{A}$ αρχίζει την τελευταία του εκτέλεση, αυτή τη φορά στο σωστό επανεκκινημένο σύστημα. Εξασφαλίζουμε τέλος ότι η προσομοίωση δεν αλλάζει ποτέ τα επιγράμματα που χρησιμοποιούνται από την επικαλυπτική διαδικασία και τη διαδιακασία επανεκκίνησης. Τα επιγράμματα αυτά είναι μόνο για ανάγνωση από τη σκοπιά του $\mathcal{A}$. Στην απόδειξη του Θεωρήματος 8 κάναμε το $\mathcal{A}$ να σημαδεύει τα επιγράμματα ούτως ώστε να εκτελεστεί σωστά. Τώρα θεωρούμε απλώς ότι αυτά τα σημάδια τοποθετούνται σε μία ξεχωριστή υποσυνιστώσα του $\mathcal{A}$ η οποία αγνοείται από τις άλλες διεργασίες. Η απόδειξη ολοκληρώνεται λαμβάνοντας υπ' όψιν το Θεώρημα 8 που λέει ότι αυτή η κατασκευή που παρουσιάσαμε είναι ακριβώς ό, τι χρειάζεται το $\mathcal{A}$ για να εκτελεστεί σωστά. $\square$

Παρουσιάσαμε την παραπάνω απόδειξη κατά κάποιο τρόπο περιγραφικά ούτως ώστε να αποφύγουμε τις πολλές λεπτομέρειες χαμηλού επιπέδου. Για λόγους πληρότητας, παρουσιάζουμε ξεχωριστά μία τυπική κατασκευαστική απόδειξη στο τέλος της παρούσας ενότητας.

**Θεώρημα 10.** *Η $SNSPACE(n^2)$ είναι υποσύνολο της $MPS$.*

*Απόδειξη.* Στα Θεωρήματα 8 και 9 δείξαμε ότι το μοντέλο ΣΠΠΔ μπορεί να προσομοιώσει μία αιτιοκρατική ΤΜ $\mathcal{M}$ χώρου $\mathcal{O}(n^2)$. Εδώ παρουσιάζουμε κάποιες τροποποιήσεις που θα επιτρέψουν την προσομοίωση μίας ανταιτιοκρατικής ΤΜ $\mathcal{N}$ ίδιου μεγέθους μνήμης. Η $\mathcal{N}$ είναι παρόμοια με την $\mathcal{M}$. Παρατηρήστε ότι η $\mathcal{N}$ είναι διαγνώστης για κάποιο κατηγόρημα της $SNSPACE(n^2)$, επομένως, πάντα τερματίζει. Οι τροποποιήσεις που κάνουμε αφορούν στις συνιστώσες κατάστασης των πρακτόρων και τη διαδικασία επανεκκίνησης μετά από κάθε συνένωση γραμμικών γραφημάτων.

Κάθε κατάσταση πράκτορα $c \in Q$ έχει μία επιπλέον τέταρτη συνιστώσα $c_4$ (από εδώ και στο εξής θα την αναφέρουμε ως *συνιστώσα επιλογής*) η οποία αρχικοποιείται στην τιμή $t_{max} - 1$, όπου $t_{max}$ είναι ο μέγιστος αριθμός ανταιτιοκρατικών επιλογών μπροστά στις οποίες μπορεί να βρεθεί ποτέ η $\mathcal{N}$. Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι κάθε πράκτορας θα πρέπει να είναι σε θέση να αποθηκεύσει τη συνάρτηση μεταβάσεων της $\mathcal{N}$ (η οποία περιλαμβάνει τις ανταιτιοκρατικές μεταβάσεις) ούτως ώστε να μπορεί να την εκτελέσει. Προφανώς, υπάρχει ένα σταθερό άνω φράγμα στο πλήθος των ανταιτιοκρατικών επιλογών (ανεξάρτητο του μεγέθους του πληθυσμού) και συνεπώς αυτό είναι εφικτό. Επιπλέον, το $t_{max}$ μπορεί εύκολα να εξαχθεί από τη συνάρτηση μεταβάσεων της $\mathcal{N}$.

Σε ό, τι αφορά στη διαδικασία επανεκκίνησης, αυτή αλλάζει ως εξής: Κάθε φορά που ένας αρχηγός επανεκκινείται θέτει τη συνιστώσα επιλογής στην τιμή $t_{max}-1$. Κάθε φορά που κατά τη διάρκεια της επανεκκίνησης το αστέρι περνάει από έναν πράκτορα $v$ στον δεξιό του γείτονα $u$, ο $u$ θέτει τη συνιστώσα επιλογής του στη συνιστώσα του $v$ μείον ένα. Εάν η νέα τιμή είναι μικρότερη του 0 τότε γίνεται $t_{max}-1$. Από το Θεώρημα 9 γνωρίζουμε ότι οι επανεκκινήσεις τελικά θα σταματήσουν και ότι η τελευταία επανεκκίνηση λαμβάνει χώρα σε ένα επικαλυπτικό γραμμικό γράφημα του $G$ με σωστά επιγράμματα. Αφού η διαδικασία επανεκκίνησης πραγματοποιείται από τ' αριστερά προς τα δεξία, μετά το πέρας της τελευταίας τέτοιας διαδικασίας θα έχουμε ένα επικαλυπτικό γραμμικό γράφημα όπου οι συνιστώσες επιλογής θα είναι $t_{max}-1, t_{max}-2, \ldots, 1, 0, t_{max}-1, \ldots$ κ.ο.κ. Από εδώ και στο εξής οι συνιστώσες αυτές δε θα τροποποιηθούν.

Για να το δούμε λίγο πιο συστηματικά, ας θεωρήσουμε ότι κάθε πράκτορας του γραμμικού γραφήματος έχει μία θέση ανάλογα με την απόστασή του από το άκρο αρχηγού. Ο αρχηγός έχει τη θέση 0, ο γείτονάς του την 1, κ.ο.κ. Τότε ο τύπος που καθορίζει την τιμή της συνιστώσας επιλογής για κάθε πράκτορα είναι

$$(t_{max}-1)-(\textit{θέση} \mod t_{max}).$$

Παρατηρήστε, ωστόσο, ότι οι ίδιοι οι πράκτορες δε γνωρίζουν τον τύπο αυτόν ούτε γνωρίζουν τη θέση τους και απλώς αναθέτουν τις τιμές με τον τρόπο που περιγράψαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Η θέση εξαρτάται από το μέγεθος του πληθυσμού και δε χωράει στη μνήμη του πράκτορα.

Όποτε πρέπει να γίνει μία ανταιτιοκρατική επιλογή μεταξύ $t$ υποψηφίων μεταβάσεων, όπου εξ' ορισμού $t \leq t_{max}$, ο πράκτορας $u$ που ελέγχει την προσομοίωση της $\mathcal{N}$ αντιστοιχίζει τους αριθμούς $0, 1, \ldots, t-1$ στις μεταβάσεις αυτές και περιμένει για μία αυθαίρετη αλληλεπίδραση. Η συνιστώσα επιλογής του πράκτορα $v$ με τον οποίο θα έχει την επόμενη αλληλεπίδραση καθορίζει την ανταιτιοκρατική επιλογή. Αυτό επιτυγχάνεται βάζοντας τον $u$ να επιλέξει την υποψήφια μετάβαση που έχει αντιστοιχηθεί με τον αριθμό $v(c_4) \mod t$, όπου $v(c_4)$ συμβολίζει τη συνιστώσα επιλογής του $v$. Παρατηρήστε ότι σε κάθε τέτοιο βήμα όλες οι πιθανές ανταιοκρατικές επιλογές μπορούν να συμβούν, αρκεί να υπάρχει επαρκής αριθμός πρακτόρων, το οποίο ισχύει ασυμπτωτικά.

Όπως και στη $\mathcal{M}$, κάθε φορά που η προσομοίωση φτάνει σε μία αποδεκτική κατάσταση όλοι οι πράκτορες δίνουν έξοδο 1 και η προσομοίωση τερματίζει. Επιπρόσθετα, κάθε φορά που η προσομοίωση φτάνει σε μία απορριπτική κατάσταση επανεκκινείται αφού δεν αρκεί η εύρεση ενός απορριπτικού κλάδου για να διαγνωστεί η απόρριψη. Η διακαιοσύνη εγγυάται ότι με τον τρόπο αυτό και αν δεν παρθεί κάποια ενδιάμεση απόφαση τελικά θα ακολουθηθούν όλα τα πιθανά μονοπάτια του δέντρου υπολογισμού της $\mathcal{N}$. Η απόδειξη ορθότητας περιλαμβάνει τις ακόλουθες δύο περιπτώσεις:

1. *Εάν η $\mathcal{N}$ απορρίπτει τότε τελικά κάθε πράκτορας δίνει έξοδο* 0. Αρχικά, η έξοδος κάθε πράκτορα είναι 0 και αλλάζει μόνο αν η $\mathcal{N}$ αποδεχθεί. Όμως όλοι οι κλάδοι του υπολογισμού της $\mathcal{N}$ απορρίπτουν, επομένως η έξοδος κάθε πράκτορα παραμένει για πάντα 0.

2. *Εάν η $\mathcal{N}$ αποδέχεται τότε τελικά κάθε πράκτορας δίνει έξοδο* 1. Αφού η $\mathcal{N}$ αποδέχεται, υπάρχει κάποια ακολουθία φάσεων που καταλήγει σε μία φάση $C'$ στην οποία κάθε πράκτορας δίνει έξοδο 1. Αρκεί να δ.ό. κάθε υπολογισμός φτάνει στη $C'$. Έστω ότι κάποιος υπολογισμός δε φτάνει. Αφού η $\mathcal{N}$ τερματίζει πάντα, η προσομοίωση θα βρεθεί στην αρχική φάση, έστω $C$, άπειρο αριθμό φορών. Λόγω της δικαιοσύνης, το ίδιο θα έπρεπε να ισχύει και για τη $C'$, άρα άτοπο. Συνεπώς, κάθε υπολογισμός φτάνει τελικά σε κάποια τέτοια $C'$ και η έξοδος σταθεροποιείται στην τιμή 1.

$\square$

**Ορισμός 7.** *Έστω $DMP$ ($UMP$) η κλάση των κατηγορημάτων που είναι σταθερά υπολογίσιμα από το μοντέλο ΠΠΔ σε οποιαδήποτε οικογένεια $\mathcal{G}$ κατευθυντών (ακατεύθυντων) και συνεκτικών γραφημάτων επικοινωνίας.*

Στο θεώρημα που ακολουθεί συμβολίζουμε $m$ το πλήθος των ακμών του γραφήματος επικοινωνίας.

**Θεώρημα 11.** *Όλα τα κατηγορήματα στην $DMP$ και την $UMP$ ανήκουν επίσης στην κλάση $NSPACE(m)$.*

*Απόδειξη.* Έστω $\mathcal{A}$ ένα ΠΠΔ που υπολογίζει σταθερά ένα τέτοιο κατηγόρημα $p$ σε κάποια οικογένεια γραφημάτων $\mathcal{G}$, και έστω $G \in \mathcal{G}$ οποιοδήποτε γράφημα αυτής της οικογένειας. Αφού το $G$ είναι πάντα συνεκτικό, έχουμε ότι $m \geq n-1$. Μία φάση δικτύου μπορεί να αναπαρασταθεί άμεσα, αποθηκεύοντας μία κατάσταση ανά κόμβο και μία κατάσταση ανά ακμή του $G$. Αυτό απαιτεί χώρο $\mathcal{O}(m)$ (στην πραγματικότητα, είναι $m+n$, αλλά αφού $m \geq n-1$, το $m$ υπερισχύει του $n$). Υπενθυμίζουμε ότι η γλώσσα που αντιστοιχεί στο $p$ ορίζεται ως $L_p = \{x \mid x \in X^* \text{ και } p(x) = 1\}$.

Παρουσιάζουμε ανταιτιοκρατική ΤΜ $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ που διαγιγνώσκει την $L_p$ σε χώρο $\mathcal{O}(m)$. Η $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ λειτουργεί ως εξής: Για να αποδεχθεί την είσοδο $x$, η $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ πρέπει να επαληθεύσει δύο συνθήκες:

1. Ότι υπάρχει μία φάση $C$ προσβάσιμη από την $I(x)$ (η αρχική φάση που αντιστοιχεί στην $x$), κατά την οποία όλοι οι πράκτορες δίνουν έξοδο 1 και

2. ότι δεν υπάρχει $C'$ προσβάσιμη από τη $C$, κατά την οποία τουλάχιστον ένας πράκτορας δίνει έξοδο 0.

Η πρώτη συνθήκη επαληθεύεται μαντεύοντας και ελέγχοντας μία ακολουθία φάσεων δικτύου, ξεκινώντας απ' την $I(x)$ και φτάνοντας μία τέτοια $C$. Η $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ μαντεύει μία $C_{i+1}$ κάθε φορά, επαληθεύει ότι $C_i \rightarrow C_{i+1}$ (ξεκινώντας απ' τη $C_0 = I(x)$, δηλαδή $i = 0$)

και, εάν ισχύει, αντικαθιστά τη $C_i$ με τη $C_{i+1}$, διαφορετικά πετάει αυτή τη $C_{i+1}$. Η δεύτερη συνθήκη είναι το συμπλήρωμα ενός παρόμοιου προβλήματος αναζήτησης. Όμως, η $NSPACE$ είναι κλειστή ως προς το συμπλήρωμα για όλες τις χωρικές συναρτήσεις που είναι $\geq \log n$ (βλέπε θεώρημα Immerman-Szelepcsényi [40] ή [47] σελίδες $151 - 153$). Επομένως, η $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ διαγιγνώσκει την $L_p$ σε χώρο $O(m)$. □

Το Θεώρημα 11 έχει την ακόλουθη άμεση συνέπεια.

**Πόρισμα 2.** *Η $MPS$ είναι υποσύνολο της $SNSPACE(n^2)$.*

*Απόδειξη.* Κάθε $p \in MPS$ είναι συμμετρικό (δείτε την Παρατήρηση 1) και σύμφωνα με το Θεώρημα 11 ανήκει στην $NSPACE(m)$. Τέλος, παρατηρήστε ότι η $MPS$ αναφέρεται σε πλήρη γραφήματα επικοινωνίας, για τα οποία $m = \mathcal{O}(n^2)$. □

Φτάσαμε τώρα στον ακόλουθο ακριβή χαρακτηρισμό για την $MPS$.

**Θεώρημα 12.** *$MPS = SNSPACE(n^2)$.*

*Απόδειξη.* Η μία κατεύθυνση προκύπτει απ' το Θεώρημα 10 και η αντίστροφη απ' το Πόρισμα 2. □

### $SSPACE(n^2) \subseteq MPS$: Μία Τυπική Κατασκευαστική Απόδειξη

Εδώ τυποποιούμε πλήρως το βασικό αποτέλεσμα αυτής της Ενότητας (δηλαδή το Θεώρημα 9) παρέχοντας τον κώδικα της προσομοίωσης.[2] Έστω ένα πεπερασμένο αλφάβητο $\Sigma$ και $L \subseteq \Sigma^*$ μία συμμετρική γλώσσα τ.ώ. $L \in SPACE(n^2)$. Έστω $p_L : \Sigma^* \to \{0,1\}$ (κατά τα γνωστά) το κατηγόρημα που αντιστοιχεί στην $L$ (και που ορίζεται ως $p_L(x) = 1$ ανν $x \in L$).

[2] Το καλούμε "βασικό αποτέλεσμα" διότι, δεδομένου αυτού, η ανταιτιοκρατική γενίκευσή του προκύπτει εύκολα.

Έστω $\mathcal{M} = (Q_m, \Sigma, \Gamma, \delta_m, q_1, q_{accept}, q_{reject})$ η ΤΜ που διαγιγνώσκει την $L$ σε χώρο $\mathcal{O}(n^2)$. Έστω $Q_i = Q_m - \{q_{accept},\ q_{reject}\}$. Δοθείσης μίας μετάβασης $\delta_m(q,\gamma) = (q',\gamma',D)$, όπου $q,q' \in Q_m$, $\gamma,\gamma' \in \Gamma$ και $D \in \{L,R\}$, ορίζουμε τις $\delta_m^1(q,\gamma) = q'$, $\delta_m^2(q,\gamma) = \gamma'$ και $\delta_m^3(q,\gamma) = D$. Κατασκευάζουμε ένα ΣΠΠΔ $\mathcal{B} = (X,Y,Q,S,I,O,\delta)$ που υπολογίζει σταθερά το $p_L$. Τυπικά, αυτό σημαίνει ότι για κάθε $\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n = x \in \Sigma^*$, όπου $n \geq 3$, όταν το $\mathcal{B}$ εκτελείται στο πλήρες γράφημα επικοινωνίας $n$ πρακτόρων και για ανάθεση εισόδου $\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n$, όλοι οι πράκτορες δίνουν τελικά ως έξοδο $p_L(x)$.

Το αλφάβητο εισόδου του $\mathcal{B}$ είναι το $\Sigma$ (δηλαδή $X = \Sigma$). Επομένως, δοθέντος ενός πληθυσμού $n$ πρακτόρων $\{1,2,\ldots,n\}$, η είσοδος σε αυτούς τους πράκτορες μπορεί να είναι κάθε $x \in \Sigma^*$ μήκους $n$. Θέλουμε όλοι οι πράκτορες να δίνουν έξοδο 1 εάν $p_L(x) = 1$ και 0 εάν $p_L(x) = 0$. Η ιδέα είναι να κατασκευάσουμε το $\mathcal{B}$ κατά τέτοιο τρόπο που να προσομοιώνει τη $\mathcal{M}$. Προφανώς, υπάρχει επαρκής χώρος για να τρέξει η προσομοίωση, αφού η $\mathcal{M}$ για είσοδο $x$, όπου $|x| = n$, χρησιμοποιεί χώρο $\mathcal{O}(n^2)$ και αφού το $\mathcal{B}$ για την ίδια είσοδο τρέχει στο πλήρες γράφημα επικοινωνίας $n$ κόμβων και συνεπώς διαθέτει $\mathcal{O}(n^2)$ ακμές για να χρησιμοποιήσει ως κελιά. Έτσι, αν καταφέρουμε να δώσουμε αυτή την κατασκευή, όταν η $\mathcal{M}$ θα απαντάει ''αποδοχή'' όλοι οι πράκτορες θα δίνουν ως έξοδο 1 ενώ όταν απαντάει ''απόρριψη'' όλοι θα δίνουν έξοδο 0 (μία από αυτές τις δύο απαντήσεις θα δίνεται από τη $\mathcal{M}$ σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων).

Το αλφάβητο εξόδου $Y$ είναι το $\{0,1\}$, αφού ασχολούμαστε με κατηγορήματα. Η κατάσταση $c \in Q$ κάθε πράκτορα αποτελείται από τρεις συνιστώσες $(c_1,c_2,c_3)$. Η $c_1$ περιλαμβάνει το *επίγραμμα* που χρησιμοποιείται από την επικαλυπτική διαδικασία και τις διαδικασίες συνένωσης και επανεκκίνησης, η $c_2$ περιλαμβάνει την *κατάσταση της προσομοίωσης* και η $c_3$ την *εφεδρία εισόδου*. Κάθε κατάσταση ακμής $s \in S$ αποτελείται από μία ή δύο συνιστώσες. Οι ενεργές ακμές χρησιμοποιούν μόνο μία συνιστώσα που τις προσδιορίζει ως ορθές/ανάστροφες και οι ανενεργές έχουν καταστάσεις της μορφής $(0,s_2)$, όπου η $s_2$ παίζει το ρόλο ενός κελιού της $\mathcal{M}$, δηλαδή περιλαμβάνει ένα σύμβολο του $\Gamma$.

Έστω και εδώ $G = (V, E)$ το γράφημα επικοινωνίας. Για κάθε $e \in E$ έχουμε ότι $\iota(e) = (0, \sqcup)$, δηλαδή αρχικά όλες οι ακμές είναι ανενεργές και τα κελιά τους περιέχουν το κενό σύμβολο $\sqcup$ (υπενθυμίζουμε ότι η $\iota$ είναι η συνάρτηση αρχικοποίησης ακμών που ορίσαμε στην Ενότητα 2.2). Για κάθε $\sigma \in X$ έχουμε ότι $I(\sigma) = (l, q_0, \sigma)$, δηλαδή αρχικά όλοι οι πράκτορες είναι απλοί αρχηγοί, η κατάσταση της προσομοίωσης είναι $q_0$ (κάποια κατάσταση που δεν ανήκει στο $Q_m$) σε όλους τους πράκτορες και όλοι οι πράκτορες περιέχουν μία εφεδρία της εισόδου που είναι μόνο για ανάγνωση. Απομένει να ορίσουμε τις $O$ και $\delta$. Ξεκινάμε από την τελευταία.

**Σημείωση 1.** *Οι καταστάσεις (σύμβολα) που χρησιμοποιούνται εδώ καθώς και ορισμένες επιλογές υλοποίησης είναι σε γενικές γραμμές διαφορετικές από εκείνες που χρησιμοποιήθηκαν στις μέχρι τώρα αποδείξεις και στα γραφικά παραδείγματα. Αυτό οφείλεται κυρίως στο γεγονός ότι εδώ παρέχουμε μία τυπική έκδοση ολόκληρης της συνάρτησης μεταβάσεων. Ωστόσο, οι βασικές ιδέες παραμένουν ίδιες. Επιπλέον, να σημειώσουμε ότι παραλείπουμε τις αναποτελεσματικές μεταβάσεις.*

*Επικαλυπτική Διαδικασία:*

$$(l, \cdot, \cdot), (l, \cdot, \cdot), (0, \cdot) \to (k_t, \cdot, \cdot), (l_h, \cdot, \cdot), i$$
$$(l_h, \cdot, \cdot), (l, \cdot, \cdot), (0, \cdot) \to (k^b, q_0, \cdot), (l_h^b, q_0, \cdot), i$$
$$(l, \cdot, \cdot), (l_h, \cdot, \cdot), (0, \cdot) \to (l_t^b, q_0, \cdot), (k^b, q_0, \cdot), p$$
$$(l_t, \cdot, \cdot), (l, \cdot, \cdot), (0, \cdot) \to (k^b, q_0, \cdot), (l_h^b, q_0, \cdot), i$$
$$(l, \cdot, \cdot), (l_t, \cdot, \cdot), (0, \cdot) \to (l_t^b, q_0, \cdot), (k^b, q_0, \cdot), p$$

*Διαδικασία Συνένωσης:*

$$(l_j, \cdot, \cdot), (l_k, \cdot, \cdot), (0, \cdot) \to (l', \cdot, \cdot), (k', \cdot, \cdot), p' \text{ για } j, k \in \{h, t\}$$

Η $l'$ κινείται προς το άκρο ακολούθου του πρώτου γραμμικού γραφήματος αντιστρέφοντας και σημαδεύοντας όλες τις ενεργές ακμές.

$$(k,\cdot,\cdot),(l',\cdot,\cdot),i \to (l',\cdot,\cdot),(k,\cdot,\cdot),p'$$
$$(l',\cdot,\cdot),(k,\cdot,\cdot),p \to (k,\cdot,\cdot),(l',\cdot,\cdot),i'$$
$$(k_t,\cdot,\cdot),(l',\cdot,\cdot),i \to (l''_0,\cdot,\cdot),(k,\cdot,\cdot),p'$$
$$(l',\cdot,\cdot),(k_t,\cdot,\cdot),p \to (k,\cdot,\cdot),(l''_0,\cdot,\cdot),i'$$

Όταν φτάσει στο άκρο ακολούθου, παράγεται μία νέα ειδική κατάσταση που ταξιδεύει προς τον αρχικά σημαδεμένο πράκτορα, διαγράφοντας παράλληλα τα σημάδια από τις ενεργές ακμές.

$$(l''_0,\cdot,\cdot),(k,\cdot,\cdot),p' \to (k_t,\cdot,\cdot),(l'',\cdot,\cdot),p$$
$$(l'',\cdot,\cdot),(k,\cdot,\cdot),p' \to (k,\cdot,\cdot),(l'',\cdot,\cdot),p$$
$$(k,\cdot,\cdot),(l'',\cdot,\cdot),i' \to (l'',\cdot,\cdot),(k,\cdot,\cdot),i$$

Όταν φτάσει στον αρχικά σημαδεμένο πράκτορα παράγεται μία νέα κατάσταση που διασχίζει και πάλι το γραμμικό γράφημα προς την αντίθετη κατεύθυνση.

$$(l'',\cdot,\cdot),(k',\cdot,\cdot),p' \to (l''',\cdot,\cdot),(k,\cdot,\cdot),p$$
$$(k,\cdot,\cdot),(l''',\cdot,\cdot),p \to (l''',\cdot,\cdot),(k,\cdot,\cdot),p$$
$$(l''',\cdot,\cdot),(k,\cdot,\cdot),i \to (k,\cdot,\cdot),(l''',\cdot,\cdot),i$$

Όταν φτάσει στο άκρο ακολούθου τότε αυτό γίνεται ο αρχηγός του νέου γραμμικού γραφήματος που έχει προκύψει απ' τη συνένωση· τόσο ο αρχηγός όσο και ο γείτονάς του βρίσκονται στη φραγμένη κατάσταση $q^b$ μετά τον τερματισμό.

$$(k_t,\cdot,\cdot),(l''',\cdot,\cdot),p \to (l^b_t,q_0,\cdot),(k^b,q_0,\cdot),p$$

*Διαδικασία Επανεκκίνησης* [3]*:*

---

[3] *Την παρουσιάζουμε μόνο για την περίπτωση αρχηγού ουράς, όμως παρόμοιες ιδέες εφαρμόζονται και για αρχηγό κεφαλής.*

Ο φραγμένος γείτονας του αρχηγού διαδίδει τη φραγμένη κατάσταση στο υπόλοιπο γραμμικό γράφημα (προς το άκρο ακολούθου) επαναφέροντας παράλληλα την κατάσταση της προσομοίωσης.

$$(k^b, \cdot, \cdot), (k, \cdot, \cdot), p \to (k^b, \cdot, \cdot), (k^b, q_0, \cdot), p$$

$$(k, \cdot, \cdot), (k^b, \cdot, \cdot), i \to (k^b, q_0, \cdot), (k^b, \cdot, \cdot), i$$

Όταν φτάσει στο άκρο ακολούθου παράγεται η κατάσταση $k_0^b$ η οποία κινείται προς το άκρο αρχηγού.

$$(k_t, \cdot, \cdot), (k^b, \cdot, \cdot), i \to (k_t^b, q_0, \cdot), (k_0^b, \cdot, \cdot), i$$

$$(k^b, \cdot, \cdot), (k_0^b, \cdot, \cdot), p \to (k_0^b, \cdot, \cdot), (k^b, \cdot, \cdot), p$$

$$(k_0^b, \cdot, \cdot), (k^b, \cdot, \cdot), i \to (k^b, \cdot, \cdot), (k_0^b, \cdot, \cdot), i$$

Όταν η $k_0^b$ φτάσει στον αρχηγό του δίνει το σημάδι αστέρι. Το σημάδι τελεία καθορίζει ποια εξερχόμενη ανενεργή ακμή του πράκτορα με το αστέρι θα επανεκκινηθεί.

$$(l_t^b, \cdot, \cdot), (k_0^b, \cdot, \cdot), p \to (l_t^*, \cdot, \cdot), (k_r^b, \cdot, \cdot), p$$

$$(k_r^b, \cdot, \cdot), (k^b, \cdot, \cdot), p \to (k^b, \cdot, \cdot), (\dot{k}^b, \cdot, \cdot), p$$

$$(k^b, \cdot, \cdot), (k_r^b, \cdot, \cdot), i \to (\dot{k}^b, \cdot, \cdot), (k^b, \cdot, \cdot), i$$

Επανεκκινείται η εξερχόμενη ακμή του αρχηγού με το αστέρι που τον συνδέει με τον πράκτορα με την τελεία.

$$(l_t^*, \cdot, \cdot), (\dot{k}^b, \cdot, \cdot), (0, \gamma) \to (l_t^*, \cdot, \cdot), (k_r^b, \cdot, \cdot), (0, \sqcup) \text{ για κάθε } \gamma \in \Gamma$$

$$(k_t^b, \cdot, \cdot), (k_r^b, \cdot, \cdot), i \to (\dot{k}_t^b, \cdot, \cdot), (k^b, \cdot, \cdot), i$$

Επανεκκινείται η τελευταία εξερχόμενη ακμή του αρχηγού με το αστέρι που τον συνδέει με τον ακόλουθο ουράς με την τελεία· μόλις το ειδικό σημάδι παύλα που έχει δοθεί στον ακόλουθο ουράς φτάσει στο άκρο αρχηγού ο τελευταίος μεταβιβάζει το αστέρι στον δεξιό του γείτονα στο γραμμικό γράφημα.

$$(l_t^*, \cdot, \cdot), (\dot{k}_t^b, \cdot, \cdot), (0, \gamma) \to (l_t^*, \cdot, \cdot), (k_t^{\bar{b}}, \cdot, \cdot), (0, \sqcup) \text{ για κάθε } \gamma \in \Gamma$$

Το σημάδι παύλα κινείται προς τον πράκτορα με το αστέρι (προς τ' αριστερά).

$$(k_t^{\bar{b}}, \cdot, \cdot), (k^b, \cdot, \cdot), i \rightarrow (k_t^b, \cdot, \cdot), (k^{\bar{b}}, \cdot, \cdot), i$$

$$(k^b, \cdot, \cdot), (k^{\bar{b}}, \cdot, \cdot), p \rightarrow (k^{\bar{b}}, \cdot, \cdot), (k^b, \cdot, \cdot), p$$

$$(k^{\bar{b}}, \cdot, \cdot), (k^b, \cdot, \cdot), i \rightarrow (k^b, \cdot, \cdot), (k^{\bar{b}}, \cdot, \cdot), i$$

Όταν ο αρχηγός δει την παύλα μέσω της ορθής ακμής, μεταβιβάζει το αστέρι στον γείτονά του· επίσης ο αρχηγός παίρνει το σημάδι τελεία αφού η εξερχόμενη ακμή του πράκτορα που έχει τώρα το αστέρι προς αυτόν είναι ανενεργή (αυτό ισχύει εδώ επειδή έχουμε υποθέσει αρχηγό ουράς). Η επανεκκίνηση συνεχίζεται όπως και στην περίπτωση που το αστέρι ήταν στον αρχηγό.

$$(l_t^*, \cdot, \cdot), (k^{\bar{b}}, \cdot, \cdot), p \rightarrow (\dot{l}_t^b, \cdot, \cdot), (k^*, \cdot, \cdot), p$$

$$(k^*, \cdot, \cdot), (\dot{l}_t^b, \cdot, \cdot), (0, \gamma) \rightarrow (k^*, \cdot, \cdot), (l_t^r, \cdot, \cdot), (0, \sqcup) \text{ για κάθε } \gamma \in \Gamma$$

$$(l_t^r, \cdot, \cdot), (k^b, \cdot, \cdot), p \rightarrow (l_t^b, \cdot, \cdot), (\dot{k}^b, \cdot, \cdot), p$$

Εάν η τελεία φτάσει στον πράκτορα με το αστέρι αυτός περνάει σε μία ειδική κατάσταση $k_1^*$.

$$(l_t^r, \cdot, \cdot), (k^*, \cdot, \cdot), p \rightarrow (l_t^b, \cdot, \cdot), (k_1^*, \cdot, \cdot), p$$

$$(k^*, \cdot, \cdot), (\dot{k}^b, \cdot, \cdot), i \rightarrow (k_1^*, \cdot, \cdot), (k^b, \cdot, \cdot), i$$

$$(k_r^b, \cdot, \cdot), (k^*, \cdot, \cdot), p \rightarrow (k^b, \cdot, \cdot), (k_1^*, \cdot, \cdot), p$$

Αφού επανεκκινούνται μόνο οι ανενεργές ακμές, εάν ο πράκτορας που βρίσκεται στην $k_1^*$ έχει μία ορθή ακμή προς τον δεξιό του γείτονα του δίνει το σημάδι $r$· με τον τρόπο αυτό η τελεία θα δοθεί στον δεξιό γείτονα του πράκτορα με το σημάδι $r$. Εάν όχι τότε την τελεία θα πάρει ο γείτονας του πράκτορα που βρίσκεται στην $k_1^*$· σε κάθε περίπτωση, ο πράκτορας με το αστέρι θα έχει σίγουρα μία ανενεργή ακμή προς τον πράκτορα που θα έχει την τελεία και η διαδικασία θα συνεχιστεί κανονικά.

$$(k_1^*,\cdot,\cdot),(k^b,\cdot,\cdot),p \to (k^*,\cdot,\cdot),(k_r^b,\cdot,\cdot),p$$

$$(k^b,\cdot,\cdot),(k_1^*,\cdot,\cdot),i \to (\dot{k}^b,\cdot,\cdot),(k^*,\cdot,\cdot),i$$

$$(k_t^b,\cdot,\cdot),(k_1^*,\cdot,\cdot),i \to (\dot{k}_t^b,\cdot,\cdot),(k^*,\cdot,\cdot),i$$

$$(k^*,\cdot,\cdot),(\dot{k}^b,\cdot,\cdot),(0,\gamma) \to (k^*,\cdot,\cdot),(k_r^b,\cdot,\cdot),(0,\sqcup) \text{ για κάθε } \gamma \in \Gamma$$

Όπως και στην περίπτωση του αρχηγού, όταν ένας πράκτορας αστέρι επανεκκινήσει και την τελευταία του ανενεργή εξερχόμενη ακμή, παράγεται το σημάδι παύλα.

$$(k^*,\cdot,\cdot),(\dot{k}_t^b,\cdot,\cdot),(0,\gamma) \to (k^*,\cdot,\cdot),(k_t^{\bar{b}},\cdot,\cdot),(0,\sqcup) \text{ για κάθε } \gamma \in \Gamma$$

Όταν έχουν επανεκκινηθεί όλες οι ανενεργές εξερχόμενες ακμές του πράκτορα με το αστέρι και η παύλα έχει φτάσει σε αυτόν, το αστέρι μεταβιβάζεται στον δεξιό του γείτονα και παράγεται μία νέα ειδική κατάσταση $(k_2^b)$· εν συνεχεία, αυτή η ειδική κατάσταση διασχίζει το γραμμικό γράφημα προς τον αρχηγό.

$$(k^*,\cdot,\cdot),(k^{\bar{b}},\cdot,\cdot),p \to (k_2^b,\cdot,\cdot),(k^*,\cdot,\cdot),p$$

$$(k^{\bar{b}},\cdot,\cdot),(k^*,\cdot,\cdot),i \to (k^*,\cdot,\cdot),(k_2^b,\cdot,\cdot),p$$

$$(k_t^{\bar{b}},\cdot,\cdot),(k^*,\cdot,\cdot),i \to (k_t^*,\cdot,\cdot),(k_2^b,\cdot,\cdot),i$$

$$(k^b,\cdot,\cdot),(k_2^b,\cdot,\cdot),p \to (k_2^b,\cdot,\cdot),(k^b,\cdot,\cdot),p$$

$$(k_2^b,\cdot,\cdot),(k^b,\cdot,\cdot),i \to (k^b,\cdot,\cdot),(k_2^b,\cdot,\cdot),i$$

Όταν βρει τον αρχηγό, του δίνει την τελεία και ξεκινάει ένας νέος γύρος επανεκκίνησης.

$$(l_t^b,\cdot,\cdot),(k_2^b,\cdot,\cdot),p \to (\dot{l}_t^b,\cdot,\cdot),(k^b,\cdot,\cdot),p$$

$$(k^*,\cdot,\cdot),(\dot{l}_t^b,\cdot,\cdot),(0,\gamma) \to (k^*,\cdot,\cdot),(l_t^r,\cdot,\cdot),(0,\sqcup) \text{ για κάθε } \gamma \in \Gamma$$

$$(k_t^*,\cdot,\cdot),(\dot{l}_t^b,\cdot,\cdot),(0,\gamma) \to (k_t^*,\cdot,\cdot),(l_t^r,\cdot,\cdot),(0,\sqcup) \text{ για κάθε } \gamma \in \Gamma$$

$$(k_t^*,\cdot,\cdot),(\dot{k}^b,\cdot,\cdot),(0,\gamma) \to (k_t^*,\cdot,\cdot),(k_r^b,\cdot,\cdot),(0,\sqcup) \text{ για κάθε } \gamma \in \Gamma$$

Όταν έχουν επανεκκινηθεί όλες οι ανενεργές εξερχόμενες ακμές του ακολούθου ουράς, παράγεται μία νέα ειδική κατάσταση $k_f^b$ η οποία διασχίζει το γραμμικό γράφημα από το άκρο ακολούθου προς το άκρο αρχηγού διαγράφοντας τα σημάδια $b$ από όλους τους πράκτορες· όταν φτάσει στον αρχηγό, η ειδική κατάσταση εξαφανίζεται υποδηλώνοντας ότι η διαδικασία επανεκκίνησης ολοκληρώθηκε.

$$(k_t^*, \cdot, \cdot), (\dot{k}^b, \cdot, \cdot), i \to (k_t, \cdot, \cdot), (k_f^b, \cdot, \cdot), i$$

$$(k^b, \cdot, \cdot), (k_f^b, \cdot, \cdot), p \to (k_f^b, \cdot, \cdot), (k, \cdot, \cdot), p$$

$$(k_f^b, \cdot, \cdot), (k^b, \cdot, \cdot), i \to (k, \cdot, \cdot), (k_f^b, \cdot, \cdot), i$$

$$(l_t^b, \cdot, \cdot), (k_f^b, \cdot, \cdot), p \to (l_t, \cdot, \cdot), (k, \cdot, \cdot), p$$

*Προσομοίωση* [4]*:*

Οι είσοδοι όλων των πρακτόρων γράφονται στις συνιστώσες κελιού των πρώτων ανενεργών εξερχόμενων ακμών (θεωρώντας μία διάταξη πάνω σε αυτές από τ' αριστερά προς τα δεξιά που ξεκινάει από το άκρο αρχηγού και συνεχίζει προς το άκρο ακολούθου). Αρχικά, ο αρχηγός γράφει την είσοδο του ακολούθου ουράς στην πρώτη του ανενεργή εξερχόμενη ακμή. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την παραγωγή της τελείας η οποία ταξιδεύει προς τον αρχηγό υποδεικνύοντας τη μία μετά την άλλη τις εισόδους των πρακτόρων και την αντίστοιχη ακμή στην οποία θα πρέπει να μεταφερθεί κάθε είσοδος.

$$(l_t, q_0, \cdot), (k_t, q_0, \sigma), (0, \sqcup) \to (l_t, q_0', \cdot), (k_t, (q_0, l), \sigma), (0, \sigma) \text{ για κάθε } \sigma \in \Sigma$$

$$(k_t, (q_0, l), \cdot), (k, q_0, \cdot), i \to (k_t, q_0, \cdot), (k, (q_0, d), \cdot), i$$

$$(l_t, q_0', \cdot), (k, (q_0, d), \sigma), (0, \sqcup) \to (l_t, q_0, \cdot), (k, (q_0, l), \sigma), (0, \sigma) \text{ για κάθε } \sigma \in \Sigma$$

$$(k, q_0, \cdot), (k, (q_0, l), \cdot), p \to (k, (q_0, d), \cdot), (k, q_0, \cdot), p$$

$$(k, (q_0, l), \cdot), (k, q_0, \cdot), i \to (k, q_0, \cdot), (k, (q_0, d), \cdot), i$$

Ο αρχηγός γράφει την είσοδό του στην πρώτη ανενεργή εξερχόμενη ακμή του γείτονά

[4] *Την παρουσιάζουμε μόνο για την περίπτωση αρχηγού ουράς, όμως παρόμοιες ιδέες εφαρμόζονται και για αρχηγό κεφαλής.*

του.

$$(l_t, q_0', \cdot), (k, (q_0, d), \cdot), p \to (l_t, (q_0, d), \cdot), (k, q_0', \cdot), p$$

$$(k, q_0', \cdot), (l_t, (q_0, d), \sigma), (0, \sqcup) \to (k, (q_0, r), \cdot), (l_t, (q_1, *), \sigma), (0, \sigma) \text{ για κάθε } \sigma \in \Sigma$$

Το σύμβολο εισόδου του γείτονα του αρχηγού γράφεται στη δεύτερη ανενεργή εξερχόμενη ακμή του· αυτή είναι η ακμή που τον συνδέει με τον τρίτο πράκτορα από τ' αριστερά στο γραμμικό γράφημα.

$$(k, q_0, \cdot), (k, (q_0, r), \cdot), i \to (k, (q_0, d), \cdot), (k, q_0', \cdot), i$$

$$(k, q_0', \sigma), (k, (q_0, d), \cdot), (0, \sqcup) \to (k, R, \sigma), (k, q_0, \cdot), (0, \sigma) \text{ για κάθε } \sigma \in \Sigma$$

Διαφορετικά, ο γείτονας του αρχηγού γράφει το σύμβολο εισόδου του στην ανενεργή εξερχόμενη που τον συνδέει με τον τέταρτο πράκτορα του γραμμικού γραφήματος.

$$(k, (q_0, r), \cdot), (k, q_0, \cdot), p \to (k, q_0', \cdot), (k, (q_0, r'), \cdot), p$$

$$(k, (q_0, r'), \cdot), (k, q_0, \cdot), p \to (k, q_0, \cdot), (k, (q_0, d), \cdot), p$$

$$(k, q_0, \cdot), (k, (q_0, r'), \cdot), i \to (k, (q_0, d), \cdot), (k, q_0, \cdot), i$$

Κάθε πράκτορας αστέρι (έχει τον έλεγχο της προσομοίωσης) που αλληλεπιδρά ως μυητής με έναν πράκτορα τελεία μέσω ανενεργής ακμής εφαρμόζει τη συνάρτηση μεταβάσεων της προσομοιούμενης TM χρησιμοποιώντας την κατάστασή του (ο πράκτορας με το αστέρι) ως την κατάσταση της TM και τη συνιστώσα κελιού της ακμής ως το κελί της ταινίας της TM πάνω απ' το οποίο βρίσκεται η κεφαλή. Η νέα κατάσταση της TM αποθηκεύεται στη συνιστώσα κατάστασης του πράκτορα με το αστέρι, το σύμβολο που γράφεται στην ταινία αποθηκεύεται στη συνιστώσα κελιού της ανενεργής ακμής και η κατεύθυνση προς την οποία κινείται η κεφαλή ($R$ για δεξιά ή $L$ για αριστερά) αντικαθιστά την τελεία του αντίστοιχου πράκτορα.

$$(l_t,(q,*),\cdot),(k,d,\cdot),(0,\gamma) \to (l_t,(\delta_m^1(q,\gamma),*),\cdot),(k,\delta_m^3(q,\gamma),\cdot),(0,\delta_m^2(q,\gamma))$$

$$\text{για κάθε } \gamma \in \Gamma,\ q \in Q_i$$

$$(l_t,(q,*),\cdot),(k_t,d,\cdot),(0,\gamma) \to (l_t,(\delta_m^1(q,\gamma),*),\cdot),(k_t,\delta_m^3(q,\gamma),\cdot),(0,\delta_m^2(q,\gamma))$$

$$\text{για κάθε } \gamma \in \Gamma,\ q \in Q_i$$

$$(k,(q,*),\cdot),(k,d,\cdot),(0,\gamma) \to (k,(\delta_m^1(q,\gamma),*),\cdot),(k,\delta_m^3(q,\gamma),\cdot),(0,\delta_m^2(q,\gamma))$$

$$\text{για κάθε } \gamma \in \Gamma,\ q \in Q_i$$

$$(k,(q,*),\cdot),(l_t,d,\cdot),(0,\gamma) \to (k,(\delta_m^1(q,\gamma),*),\cdot),(l_t,\delta_m^3(q,\gamma),\cdot),(0,\delta_m^2(q,\gamma))$$

$$\text{για κάθε } \gamma \in \Gamma,\ q \in Q_i$$

$$(k,(q,*),\cdot),(k_t,d,\cdot),(0,\gamma) \to (k,(\delta_m^1(q,\gamma),*),\cdot),(k_t,\delta_m^3(q,\gamma),\cdot),(0,\delta_m^2(q,\gamma))$$

$$\text{για κάθε } \gamma \in \Gamma,\ q \in Q_i$$

$$(k_t,(q,*),\cdot),(k,d,\cdot),(0,\gamma) \to (k_t,(\delta_m^1(q,\gamma),*),\cdot),(k,\delta_m^3(q,\gamma),\cdot),(0,\delta_m^2(q,\gamma))$$

$$\text{για κάθε } \gamma \in \Gamma,\ q \in Q_i$$

$$(k_t,(q,*),\cdot),(l_t,d,\cdot),(0,\gamma) \to (k_t,(\delta_m^1(q,\gamma),*),\cdot),(l_t,\delta_m^3(q,\gamma),\cdot),(0,\delta_m^2(q,\gamma))$$

$$\text{για κάθε } \gamma \in \Gamma,\ q \in Q_i$$

Ανάλογα με το ποιο σημάδι απ' τα $L$ και $R$ έχει κάποιος πράκτορας, δίνει στον αριστερό ή τον δεξιό του γείτονα, αντίστοιχα, μία τελεία και επανεφέρει την κατάστασή του.

$$(k,\cdot,\cdot),(k,L,\cdot),p \to (k,d,\cdot),(k,q_0,\cdot),p$$

$$(k,L,\cdot),(k,\cdot,\cdot),i \to (k,q_0,\cdot),(k,d,\cdot),i$$

$$(k,R,\cdot),(k,\cdot,\cdot),p \to (k,q_0,\cdot),(k,d,\cdot),p$$

$$(k,\cdot,\cdot),(k,R,\cdot),i \to (k,d,\cdot),(k,q_0,\cdot),i$$

$$(k_t,\cdot,\cdot),(k,R,\cdot),i \to (k_t,d,\cdot),(k,q_0,\cdot),i$$

$$(l_t,\cdot,\cdot),(k,L,\cdot),p \to (l_t,d,\cdot),(k,q_0,\cdot),p$$

Εάν ένας πράκτορας με αστέρι αλληλεπιδράσει με έναν πράκτορα με τελεία μέσω μίας ενεργής ακμής, τότε περνάει σε μία ειδική κατάσταση ($R^*$ ή $L^*$) ανάλογα με την κατεύθυνση της τελείας. Εάν ο πράκτορας με την τελεία βρίσκεται προς τη μεριά του αρχηγού (δηλαδή προς τ' αριστερά) τότε η τελεία μεταβιβάζεται στον κοντινότερο γείτονα προς τα δεξιά με τον οποίο ο πράκτορας επικοινωνεί μέσω ανενεργής εξερχόμενης ακμής· διαφορετικά γίνεται το ίδιο προς τ' αριστερά.

$$(l_t, (q, *), \cdot), (k, d, \cdot), p \to (l_t, (q, *), \cdot), (k, R, \cdot), p \text{ για κάθε } q \in Q_i$$

$$(k, (q, *), \cdot), (k, d, \cdot), p \to (k, (q, L^*), \cdot), (k, q_0, \cdot), p \text{ για κάθε } q \in Q_i$$

$$(k, \cdot, \cdot), (k, (q, L^*), \cdot), p \to (k, d, \cdot), (k, (q, *), \cdot), p \text{ για κάθε } q \in Q_i$$

$$(k, (q, L^*), \cdot), (k, \cdot, \cdot), i \to (k, (q, *), \cdot), (k, L, \cdot), i \text{ για κάθε } q \in Q_i$$

$$(k, (q, *), \cdot), (k, d, \cdot), i \to (k, (q, R^*), \cdot), (k, q_0, \cdot), p \text{ για κάθε } q \in Q_i$$

$$(k, \cdot, \cdot), (k, (q, R^*), \cdot), i \to (k, d, \cdot), (k, (q, *), \cdot), i \text{ για κάθε } q \in Q_i$$

$$(k, (q, R^*), \cdot), (k, \cdot, \cdot), p \to (k, (q, *), \cdot), (k, R, \cdot), p \text{ για κάθε } q \in Q_i$$

$$(k, L, \cdot), (k, (q, *), \cdot), i \to (k, q_0, \cdot), (k, (q, L^*), \cdot), i \text{ για κάθε } q \in Q_i$$

$$(k, R, \cdot), (k, (q, *), \cdot), p \to (k, q_0, \cdot), (k, (q, R^*), \cdot), p \text{ για κάθε } q \in Q_i$$

Εάν ένας πράκτορας που έχει το αστέρι φτάσει στην τελευταία ανενεργή εξερχόμενη ακμή του και η προσομοίωση πρέπει να συνεχιστεί προς τα δεξιά, τότε ο πράκτορας περνάει σε μία ειδική κατάσταση $R'$ που υποδηλώνει ότι ο επόμενος μυητής της προσομοίωσης θα πρέπει να είναι ο αρχηγός. Η επόμενη αλληλεπίδραση μεταβιβάζει την τελεία στον αρχηγό και τροποποιεί το σημάδι $R'$ σε $R''$. Στην επόμενη αλληλεπίδραση ο πράκτορας με το σημάδι $R''$ μεταβιβάζει το αστέρι στον δεξιό του γείτονα και του επαναφέρει την κατάσταση.

$$(k,(q,*),\cdot),(k_t,R,\cdot),(0,\cdot) \to (k,(q,R'),\cdot),(k_t,q_0,\cdot),(0,\cdot) \text{ για κάθε } q \in Q_i$$

$$(k,(q,R'),\cdot),(l_t,\cdot,\cdot),(0,\cdot) \to (k,(q,R''),\cdot),(l_t,d,\cdot),(0,\cdot) \text{ για κάθε } q \in Q_i$$

$$(k,(q,R''),\cdot),(k,\cdot,\cdot),p \to (k,q_0,\cdot),(k,(q,*),\cdot),p \text{ για κάθε } q \in Q_i$$

$$(k,\cdot,\cdot),(k,(q,R''),\cdot),i \to (k,(q,*),(k,q_0,\cdot),\cdot),i \text{ για κάθε } q \in Q_i$$

$$(l_t,(q,*),\cdot),(k_t,R,\cdot),(0,\cdot) \to (l_t,(q,R'),\cdot),(k_t,q_0,\cdot),(0,\cdot) \text{ για κάθε } q \in Q_i$$

$$(l_t,(q,R'),\cdot),(k,\cdot,\cdot),p \to (l_t,d,\cdot),(k,(q,*),\cdot),p \text{ για κάθε } q \in Q_i$$

Παρόμοια πράγματα συμβαίνουν όταν ο πράκτορας που έχει το αστέρι φτάσει στην πρώτη ανενεργή εξερχόμενη ακμή του και η προσομοίωση πρέπει να συνεχιστεί προς τ' αριστερά.

$$(k,(q,*),\cdot),(l_t,L,\cdot),(0,\cdot) \to (k,(q,L'),\cdot),(l_t,q_0,\cdot),(0,\cdot) \text{ για κάθε } q \in Q_i$$

$$(k,(q,L'),\cdot),(k_t,\cdot,\cdot),(0,\cdot) \to (k,(q,L''),\cdot),(k_t,d,\cdot),(0,\cdot) \text{ για κάθε } q \in Q_i$$

$$(k,\cdot,\cdot),(k,(q,L''),\cdot),p \to (k,(q,*),\cdot),(k,q_0,\cdot),p \text{ για κάθε } q \in Q_i$$

$$(k,(q,L''),\cdot),(k,\cdot,\cdot),i \to (k,q_0,\cdot),(k,(q,*),\cdot),i \text{ για κάθε } q \in Q_i$$

$$(k_t,(q,*),\cdot),(l_t,L,\cdot),(0,\cdot) \to (k_t,(q,L'),\cdot),(l_t,q_0,\cdot),(0,\cdot) \text{ για κάθε } q \in Q_i$$

$$(k_t,(q,L'),\cdot),(k,\cdot,\cdot),i \to (k_t,d,\cdot),(k,(q,*),\cdot),i \text{ για κάθε } q \in Q_i$$

Εάν οποιοσδήποτε πράκτορας φτάσει σε κατάσταση αποδοχής ή απόρριψης, τότε αυτή η κατάσταση διαδίδεται σε όλο τον πληθυσμό.

$$(j,(q',\cdot),\cdot),(k,(q,\cdot),\cdot),\cdot \to (j,q',\cdot),(k,q',\cdot),\cdot$$

$$\text{για κάθε } q' \in \{q_{accept}, q_{reject}\}, q \in Q_i, j,k \in \{l_t, k, k_t\}$$

$$(j,(q,\cdot),\cdot),(k,(q',\cdot),\cdot),\cdot \to (j,q',\cdot),(k,q',\cdot),\cdot$$

$$\text{για κάθε } q' \in \{q_{accept}, q_{reject}\}, q \in Q_i, j,k \in \{l_t, k, k_t\}$$

$$(j,(q',\cdot),\cdot),(k,q_0,\cdot),\cdot \to (j,q',\cdot),(k,q',\cdot),\cdot$$

$$\text{για κάθε } q' \in \{q_{accept}, q_{reject}\}, j,k \in \{l_t, k, k_t\}$$

$$(j,q_0,\cdot),(k,(q',\cdot),\cdot),\cdot \to (j,q',\cdot),(k,q',\cdot),\cdot$$

$$\text{για κάθε } q' \in \{q_{accept}, q_{reject}\}, j,k \in \{l_t, k, k_t\}$$

$$(j,q',\cdot),(k,(q,\cdot),\cdot),\cdot \to (j,q',\cdot),(k,q',\cdot),\cdot$$

$$\text{για κάθε } q' \in \{q_{accept}, q_{reject}\}, q \in Q_i, j,k \in \{l_t, k, k_t\}$$

$$(j,(q,\cdot),\cdot),(k,q',\cdot),\cdot \to (j,q',\cdot),(k,q',\cdot),\cdot$$

$$\text{για κάθε } q' \in \{q_{accept}, q_{reject}\}, q \in Q_i, j,k \in \{l_t, k, k_t\}$$

$$(j,q',\cdot),(k,q_0,\cdot),\cdot \to (j,q',\cdot),(k,q',\cdot),\cdot$$

$$\text{για κάθε } q' \in \{q_{accept}, q_{reject}\}, j,k \in \{l_t, k, k_t\}$$

$$(j,q_0,\cdot),(k,q',\cdot),\cdot \to (j,q',\cdot),(k,q',\cdot),\cdot$$

$$\text{για κάθε } q' \in \{q_{accept}, q_{reject}\}, j,k \in \{l_t, k, k_t\}$$

Μένει να ορίσουμε τη συνάρτηση εξόδου $O$. Έχουμε $O(\cdot, q_{accept}, \cdot) = 1$ και $O(q) = 0$ για κάθε $q \in Q - \{(\cdot, q_{accept}, \cdot)\}$.

# Κεφάλαιο 3

# Σταθερά Διαγνώσιμες Γλώσσες Γραφημάτων απ' το μοντέλο ΠΠΔ

## 3.1 Εισαγωγή

Στην Ενότητα αυτή προχωρούμε ακόμα ένα βήμα και μελετάμε ποιες ιδιότητες γραφημάτων είναι υπολογίσιμες από το μοντέλο ΠΠΔ. Η κατανόηση των ιδιοτήτων του γραφήματος επικοινωνίας είναι ένα πολύ σημαντικό βήμα σχεδόν σε κάθε κατανεμημένο σύστημα. Συγκεκριμένα, αγνοούμε την έννοια της εισόδου του πληθυσμού και υποθέτουμε ότι όλοι οι πράκτορες απλώς ξεκινούν από μία κοινή *αρχική κατάσταση* $q_0$. Επίσης, όπως και στο μοντέλο ΣΠΠΔ, το ίδιο ισχύει και για τις ακμές, δηλαδή, $\iota(e) = s_0$ για κάθε $e \in E$. Μας ενδιαφέρουν πρωτόκολλα που όταν εκτελούνται σε κάποιο γράφημα επικοινωνίας $G$ ενός δοθέντος σύμπαντος, μετά από πεπερασμένο αριθμό βημάτων σταθεροποιούνται σε φάσεις κατά τις οποίες όλοι οι πράκτορες δίνουν την τιμή 1 ως έξοδο εάν το $G$ ανήκει σε κάποια γλώσσα επικοινωνίας, π.χ. $L$, και 0 διαφορετικά. Η γενική ιδέα είναι η κατασκευή πρωτοκόλλων τα οποία τελικά αποδέχονται όλα τα γραφήματα επικοινωνίας (στα οποία εκτελούνται) που ικανοποιούν μία συγκεκριμένη ιδιότητα και απορρίπτουν όλα τα υπόλοιπα γραφήματα του σύμπαντος.

Η Ενότητα 3.2 αγνοεί τις εισόδους των πρακτόρων και μελετάει την υπολογισιμότητα ιδιοτήτων γραφημάτων από το μοντέλο ΠΠΔ. Η Ενότητα 3.2.1 εστιάζει σε ασθενώς συνεκτικά γραφήματα. Πρώτα αποδεικνύεται ότι η κλάση των υπολογίσιμων ιδιοτήτων είναι κλειστή ως προς τις πράξεις του *συμπληρώματος*, της *ένωσης* και της *τομής*. Η ισοτιμία κόμβων και ακμών, ο φραγμένος έξω βαθμός από μία σταθερά, η ύπαρξη ενός κόμβου με περισσότερους εισερχόμενους από εξερχόμενους γείτονες και η ύπαρξη κάποιου κατευθυντού μονοπατιού μήκους τουλάχιστον $k = \mathcal{O}(1)$ είναι κάποια παραδείγματα ιδιοτήτων των οποίων αποδεικνύεται η υπολογισιμότητα. Επίσης, αποκαλύπτεται η ύπαρξη συμμετρίας μεταξύ δύο συγκεκριμένων (υπο)γραφημάτων επικοινωνίας γεγονός το οποίο βοηθάει να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει κανένα ΠΠΔ με σταθεροποιούμενες καταστάσεις το οποίο να μπορεί να υπολογίσει εάν το $G$ περιέχει κάποιον κατευθυνόμενο κύκλο μήκους 2 (2-κύκλος). Τέλος, στην Ενότητα 3.2.2 αποδεικνύεται ότι καμία ουσιαστική ιδιότητα δεν είναι υπολογίσιμη εάν επιτρέψουμε την ύπαρξη μη συνεκτικών γραφημάτων.

## 3.2 Γλώσσες Γραφημάτων

Ανακεφαλαιώνοντας τυπικά τη συζήτηση που προηγήθηκε, εδώ υποθέτουμε ότι το αλφάβητο εξόδου είναι εξ' ορισμού δυαδικό, δηλαδή $Y = \{0, 1\}$, ότι $\iota(e) = s_0$ για κάθε $e \in E$, και ότι $I(\sigma) = q_0$, για κάθε $\sigma \in X$ (λόγω αυτού, δεν καθορίζουμε κάποιο αλφάβητο εισόδου ούτε κάποια συνάρτηση εισόδου και απλώς υποθέτουμε ότι η αρχική φάση είναι πάντα η $C_0(u) = q_0$ για κάθε $u \in V$). Χάριν απλότητας, δίνουμε και σε αυτή την ειδική περίπτωση ξεχωριστό όνομα και συγκεκριμένα το καλούμε μοντέλο *Πρωτοκόλλων Πληθυσμών με Διαμεσολαβητή για Διάγνωση Γραφημάτων* (ΠΠΔΔΓ). Όλοι οι ορισμοί που ακολουθούν ισχύουν ως προς ένα προεπιλεγμένο σύμπαν γραφημάτων $\mathcal{U}$.

**Ορισμός 8.** *Μία γλώσσα γραφημάτων $L$ είναι ένα υποσύνολο του $\mathcal{U}$ που περιλαμβάνει γραφήματα επικοινωνίας που πιθανόν μοιράζονται κάποια κοινή ιδιότητα.*

Κάποια παραδείγματα γλωσσών γραφημάτων είναι τα εξής:

- Η γλώσσα γραφημάτων που αποτελείται από όλα τα ισχυρώς συνεκτικά στοιχεία του $\mathcal{U}$.
- $L = \{G \in \mathcal{U} \mid \text{Το } G \text{ περιέχει μία κατευθυντή χαμιλτονιανή διαδρομή}\}$.
- $L = \{G \in \mathcal{U} \mid \text{Το } G \text{ έχει άρτιο αριθμό ακμών}\}$.
- $L = \{G \in \mathcal{U} \mid |V(G)| = |E(G)|\}$.

Μία γλώσσα γραφημάτων καλείται *τετριμμένη* εάν $L = \emptyset$ ή $L = \mathcal{U}$.

**Ορισμός 9.** *Έστω $L$ μία γλώσσα γραφημάτων που αποτελείται από όλα τα $G \in \mathcal{U}$ για τα οποία, σε κάθε υπολογισμό ενός ΠΠΔΔΓ $\mathcal{A}$ στο $G$, όλοι οι πράκτορες τελικά δίνουν ως έξοδο την τιμή 1. Τότε η $L$ είναι* η γλώσσα που αναγνωρίζεται σταθερά από το $\mathcal{A}$. *Μία γλώσσα γραφημάτων καλείται* σταθερά αναγνωρίσιμη *από το μοντέλο ΠΠΔΔΓ (καλείται επίσης* ΠΠΔΔΓ-αναγνωρίσιμη*) εάν κάποιο ΠΠΔΔΓ $\mathcal{A}$ την αναγνωρίζει σταθερά.*

Επομένως, ένα πρωτόκολλο *αναγνωρίζει σταθερά* τη γλώσσα γραφημάτων που αποτελείται από εκείνα τα γραφήματα στα οποία το πρωτόκολλο πάντα απαντάει "αποδοχή", δηλαδή τελικά όλοι οι πράκτορες δίνουν ως έξοδο την τιμή 1 (πιθανόν και η κενή γλώσσα).

**Ορισμός 10.** *Λέμε ότι ένα ΠΠΔΔΓ $\mathcal{A}$* διαγιγνώσκει σταθερά *μία γλώσσα γραφημάτων $L \subseteq \mathcal{U}$ (ή ισοδύναμα ένα κατηγόρημα $p_L : \mathcal{U} \to \{0,1\}$ που ορίζεται ως $p_L(G) = 1$ ανν $G \in L$) εάν για κάθε $G \in \mathcal{U}$ και κάθε υπολογισμό του $\mathcal{A}$ στο $G$, όλοι οι πράκτορες τελικά δίνουν ως έξοδο την τιμή 1 εάν $G \in L$ και όλοι δίνουν την τιμή 0 εάν $G \notin L$. Μία γλώσσα γραφημάτων λέγεται* σταθερά διαγνώσιμη *από το μοντέλο ΠΠΔΔΓ (καλείται επίσης* ΠΠΔΔΓ-διαγνώσιμη*) εάν κάποιο ΠΠΔΔΓ $\mathcal{A}$ τη διαγιγνώσκει σταθερά.*

### 3.2.1 Ασθενώς Συνεκτικά Γραφήματα

Στην ενότητα αυτή, μελετάμε μία ενδιαφέρουσα περίπτωση στην οποία το σύμπαν γραφημάτων δεν επιτρέπεται να περιέχει μη συνεκτικά γραφήματα. Επομένως, το σύμπαν γραφημάτων εδώ είναι το $\mathcal{G}_{con}$ (ανακαλέστε τον ορισμό του από την Ενότητα 1.3.2) και ως εκ τούτου μία γλώσσα γραφημάτων δε μπορεί παρά να είναι ένα υποσύνολο του $\mathcal{G}_{con}$. Ο βασικός λόγος για τον οποίο επιλέγουμε αυτό το συγκεκριμένο σύμπαν γραφημάτων για την κατασκευή των πρωτοκόλλων μας είναι ο ακόλουθος. Εάν επιτρέψουμε επίσης την ύπαρξη μη συνεκτικών γραφημάτων τότε μπορούμε να αποδείξουμε ότι καμία γλώσσα γραφημάτων δεν είναι διαγνώσιμη. Αυτό διατυπώνεται και αποδεικνύεται στην Ενότητα 3.2.2.

#### Σταθερά Υπολογίσιμες Γλώσσες Γραφημάτων

Στόχος μας είναι να δείξουμε τη σταθερή διαγνωσιμότητα ορισμένων σημαντικών γλωσσών γραφημάτων παρέχοντας πρωτόκολλα γι' αυτές και αποδεικνύοντας την ορθότητά τους. Ξεκινάμε αποδεικνύοντας ορισμένα αποτελέσματα κλειστότητας ούτως ώστε να αποκτήσουμε ένα χρήσιμο εργαλείο για το σκοπό μας.

**Θεώρημα 13.** *Η κλάση των σταθερά διαγνώσιμων γλωσσών γραφημάτων είναι κλειστή ως προς το συμπλήρωμα, την ένωση και την τομή.*

*Απόδειξη.* Δείχνουμε πρώτα ότι για κάθε σταθερά διαγνώσιμη γλώσσα γραφημάτων $L$ το συμπλήρωμά της $\overline{L}$ είναι επίσης σταθερά διαγνώσιμη γλώσσα. Εξ' ορισμού υπάρχει ένα ΠΠΔΔΓ $\mathcal{A}_L$ που διαγιγνώσκει σταθερά την $L$. Επομένως, για κάθε $G \in \mathcal{G}_{con}$ και κάθε υπολογισμό του $\mathcal{A}_L$ στο $G$ όλοι οι πράκτορες δίνουν ως έξοδο 1 αν $G \in L$ και 0 διαφορετικά. Συμπληρώνοντας την απεικόνιση εξόδου $O_\mathcal{A}$ του $\mathcal{A}$ παίρνουμε ένα νέο πρωτόκολλο $\overline{\mathcal{A}}$, του οποίου η απεικόνιση εξόδου ορίζεται ως $O_{\overline{\mathcal{A}}}(q) = 1$ ανν $O_\mathcal{A}(q) = 0$, για κάθε $q \in Q_{\mathcal{A}} = Q_{\overline{\mathcal{A}}}$, στο οποίο οι πράκτορες δίνουν έξοδο 1 εάν $G \notin L$ και 0 διαφορετικά, επομένως διαγιγνώσκει σταθερά την $\overline{L}$.

Τώρα δείχνουμε ότι για οποιεσδήποτε σταθερά διαγνώσιμες γλώσσες $L_1$ και $L_2$, η $L_3 = L_1 \cup L_2$ είναι επίσης σταθερά διαγνώσιμη. Έστω $\mathcal{A}_1$ και $\mathcal{A}_2$ τα ΠΠΔΔΓ που διαγινώσκουν σταθερά τις $L_1$ και $L_2$, αντίστοιχα. Βάζουμε τα δύο αυτά πρωτόκολλα να εκτελούνται παράλληλα, δηλαδή κατασκευάζουμε ένα νέο πρωτόκολλο $\mathcal{A}_3$ του οποίου οι καταστάσεις πρακτόρων και ακμών αποτελούνται από δύο συνιστώσες, μία για το πρωτόκολλο $\mathcal{A}_1$ και μία για το $\mathcal{A}_2$. Έστω $O_1$ και $O_2$ οι αντίστοιχες απεικονίσεις εξόδου των δύο πρωτοκόλλων. Ορίζουμε την απεικόνιση εξόδου $O_3$ του $\mathcal{A}_3$ ως $O_3(q, q') = 1$ ανν τουλάχιστον μία εκ των $O_1(q)$ και $O_2(q')$ ισούται με 1, για κάθε $q \in Q_{\mathcal{A}_1}$ και κάθε $q' \in Q_{\mathcal{A}_2}$. Εάν $G \in L_3$ τότε τουλάχιστον για ένα από τα δύο πρωτόκολλα όλοι οι πράκτορες δίνουν έξοδο 1 απ' την αντίστοιχη συνιστώσα της κατάστασής τους, άρα το $\mathcal{A}_3$ απαντάει ορθά ''αποδοχή'', ενώ εάν $G \notin L_3$ τότε και οι δύο συνιστώσες δίνουν σε όλους τους πράκτορες την τιμή εξόδου 0, άρα το $\mathcal{A}_3$ απαντάει ορθά ''απόρριψη''. Συμπεραίνουμε ότι το $\mathcal{A}_3$ διαγιγνώσκει σταθερά την $L_3$ πράγμα το οποίο αποδεικνύει ότι η $L_3$ είναι ΠΠΔΔΓ-διαγνώσιμη.

Ορίζοντας την απεικόνιση εξόδου $O_3$ του $\mathcal{A}_3$ ως $O_3(q, q') = 1$ ανν $O_1(q) = O_2(q') = 1$, για κάθε $q \in Q_{\mathcal{A}_1}$ και κάθε $q' \in Q_{\mathcal{A}_2}$, και υλοποιώντας την ίδια σύνθεση όπως και προηγουμένως, είναι εύκολο να δει κανείς ότι στην περίπτωση αυτή το $\mathcal{A}_3$ διαγιγνώσκει σταθερά την τομή των $L_1$ και $L_2$. □

**Παρατήρηση 3.** *Σε κάθε ένωση και τομή το μέγεθος του νέου πρωτοκόλλου είναι ίσο με το γινόμενο των μεγεθών των πρωτοκόλλων που συντίθενται. Ως εκ τούτου, η κλειστότητα ως προς αυτές τις πράξεις μπορεί να ισχύει μόνο για σταθερό αριθμό διαδοχικών εφαρμογών τους.*

Σε ορισμένες περιπτώσεις η κατασκευή ενός πρωτοκόλλου που ικανοποιεί τη *σύμβαση εξόδου κατηγορημάτων* (η σύμβαση εξόδου κατηγορημάτων ορίστηκε στην [6] και απλώς απαιτεί όλοι οι πράκτορες να συμφωνούν τελικά στη σωστή τιμή εξόδου). Σε τέτοιες περιπτώσεις, μπορούμε να χρησιμοποιούμε την ακόλουθη παραλλαγή του Θεωρήματος 3 η οποία διευκολύνει την απόδειξη ύπαρξης ΠΠΔΔΓ που διαγιγνώσκουν σταθερά κάποια γλώσσα.

**Θεώρημα 14.** *Εάν υπάρχει ένα ΠΠΔΔΓ $\mathcal{A}$ με σταθεροποιούμενες καταστάσεις, το οποίο εγγυάται ως προς κάποιο κατηγόρημα $L$ ένα ημιγραμμικό κατηγόρημα, τότε η $L$ είναι ΠΠΔΔΓ-διαγνώσιμη.*

*Απόδειξη.* Η απόδειξη προκύπτει άμεσα από την απόδειξη του Θεωρήματος 3. Το $\mathcal{A}$ μπορεί να συντεθεί με ένα ΠΠΔΔΓ $\mathcal{B}$ που αποδεδειγμένα υπάρχει και του οποίου οι σταθεροποιύμενες είσοδοι είναι οι καταστάσεις πρακτόρων του $\mathcal{A}$, δίνοντας ένα νέο ΠΠΔΔΓ $\mathcal{C}$ που διαγιγνώσκει σταθερά την $L$ σύμφωνα με τη σύμβαση εξόδου κατηγορημάτων. Παρατηρήστε ότι το $\mathcal{B}$ είναι όντως ένα ΠΠΔΔΓ, αφού οι σταθεροποιούμενες είσοδοί του δεν είναι πραγματικές είσοδοι (τα ΠΠΔΔΓ εξ' ορισμού δεν έχουν εισόδους). Απλώς ανανεώνει τις συνιστώσες καταστάσεών του λαμβάνοντας ταυτόχρονα υπ' όψιν τις συνιστώσες καταστάσεων του $\mathcal{A}$ που τελικά σταθεροποιούνται. Επομένως, το $\mathcal{C}$ που αποτελεί τη σύνθεσή τους είναι επίσης ένα ΠΠΔΔΓ. □

**Θεώρημα 15** (Ισοτιμία Κόμβων)**.** *Οι γλώσσες γραφημάτων $N_{even} = \{G \in \mathcal{G}_{con} \mid$ Το $|V(G)|$ είναι άρτιο$\}$ και $N_{odd} = \overline{N}_{even}$ είναι σταθερά διαγνώσιμες.*

*Απόδειξη.* Έστω ότι η αρχική κατάσταση των πρακτόρων είναι η 1. Τότε υπάρχει ένα πρωτόκολλο στην [6] που διαγιγνώσκει τη $N_{even}$ στην περίπτωση που το $G$ είναι πλήρες. Όμως, σύμφωνα με το Θεώρημα 4 στην σελίδα 295 της [6], θα πρέπει να υπάρχει και ένα πρωτόκολλο που διαγιγνώσκει τη $N_{even}$ στη γενική περίπτωση, δηλαδή σε κάθε γράφημα $G \in \mathcal{G}_{con}$, με συνεχή ανταλλαγή καταστάσεων μεταξύ των πρακτόρων για να διασφαλίσει ότι οποιεσδήποτε δύο καταστάσεις τελικά συναντιούνται (γι' αυτό δεν αρκεί η συνθήκη δικαιοσύνης όταν το γράφημα δεν είναι πλήρες αλλά θα πρέπει να το διασφαλίσει το ίδιο το πρωτόκολλο). Επομένως, η $L$ είναι σταθερά διαγνώσιμη από το μοντέλο ΠΠ όταν αυτό δε χρησιμοποιεί εισόδους και όταν το αλφάβητο εξόδου του είναι το $\{0,1\}$, και αφού το μοντέλο ΠΠ αποτελεί ειδική περίπτωση του μοντέλου ΠΠΔΔΓ, η $N_{even}$ είναι ΠΠΔΔΓ-διαγνώσιμη. Επιπλέον, αφού η κλάση των σταθερά διαγνώσιμων γλωσσών είναι κλειστή ως προς το συμπλήρωμα (Θεώρημα 13) έχουμε ότι και η $N_{odd} = \overline{N}_{even}$ είναι ΠΠΔΔΓ-διαγνώσιμη. □

**Θεώρημα 16** (Ισοτιμία Ακμών)**.** *Οι γλώσσες γραφημάτων* $E_{even} = \{G \in \mathcal{G}_{con} \mid$ *Το* $|E(G)|$ *είναι άρτιο*$\}$ *και* $E_{odd} = \overline{E}_{even}$ *είναι σταθερά διαγνώσιμες.*

*Απόδειξη.* Λόγω της κλειστότητας ως προς το συμπλήρωμα, αρκεί να δ.ό. η $E_{even}$ είναι σταθερά διαγνώσιμη και θα το κάνουμε παρουσιάζοντας ένα ΠΠΔΔΓ που τη διαγιγνώσκει σταθερά. Η αρχική κατάσταση των πρακτόρων είναι η $(0,0)$ η οποία αποτελείται από δύο συνιστώσες, όπου η πρώτη είναι το *διφύο δεδομένων* και η δεύτερη το *διφύο επαγρύπνησης*, ακολουθώντας την ιδέα του πρωτοκόλλου ισοτιμίας του [6]. Λέμε ότι ένας πράκτορας με διφύο επαγρύπνησης 0 *κοιμάται* (*ή είναι στην κατάσταση ύπνου*) και ότι ένας πράκτορας με διφύο επαγρύπνησης 1 είναι *άγρυπνος*. Η αρχική κατάσταση των ακμών είναι η 1, που παρομοίως εκφράζει ότι όλες οι ακμές είναι αρχικά άγρυπνες. Διακρίνουμε τις ακόλουθες τέσσερις κατηγορίες πιθανόν αλληλεπιδράσεων (παρουσιάζουμε επίσης το αποτέλεσμά τους):

1. Και οι δύο πράκτορες κοιμούνται και η ακμή είναι άγρυπνη:
    - Ο μυητής ξυπνάει, και οι δύο πράκτορες ανανεώνουν το διφύο δεδομένων τους στην τιμή 1 και η ακμή περνάει στην κατάσταση ύπνου.
2. Τόσο οι πράκτορες όσο και η ακμή κοιμούνται:
    - Δε συμβαίνει τίποτα.
3. Ο ένας πράκτορας είναι άγρυπνος και ο άλλος κοιμάται:

- Ο πράκτορας που κοιμόταν ξυπνάει ενώ αυτός που ήταν άγρυπνος περνάει στην κατάσταση ύπνου. Και οι δύο θέτουν τα διφύα δεδομένων τους στο modulo 2 άθροισμα του διφύου δεδομένων του πράκτορα που ήταν άγρυπνος πριν την αλληλεπίδραση και της κατάστασης της ακμής. Εάν η ακμή ήταν άγρυπνη περνάει στην κατάσταση ύπνου.

4. Και οι δύο πράκτορες είναι άγρυπνοι:

   - Ο αποκρινόμενος περνάει στην κατάσταση ύπνου, και οι δύο θέτουν τα διφύα δεδομένων τους στο modulo 2 άθροισμα των διφύων δεδομένων τους και της κατάστασης της ακμής. Εάν η ακμή ήταν άγρυπνη περνάει στην κατάσταση ύπνου.

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι το αρχικό modulo 2 άθροισμα των διφύων των ακμών (αρχικά είναι όλα ίσα με 1) διατηρείται και είναι πάντα ίσο με το modulo 2 άθροισμα των διφύων των άγρυπνων πρακτόρων και των άγρυπνων ακμών. Η πρώτη αλληλεπίδραση δημιουργεί τον πρώτο άγρυπνο πράκτορα και από εκείνη τη στιγμή υπάρχει πάντα τουλάχιστον ένας άγρυπνος πράκτορας και τελικά παραμένει μόνο ένας. Επιπλέον, όλες οι ακμές περνούν τελικά στην κατάσταση ύπνου, πράγμα το οποίο σημαίνει ότι τελικά ο μόνος εναπομείναντας άγρυπνος πράκτορας περιέχει το modulo 2 άθροισμα των αρχικών διφύων των ακμών το οποίο είναι 0 ανν το πλήθος των ακμών είναι άρτιο. Όλοι οι υπόλοιποι πράκτορες κοιμούνται, πράγμα το οποίο σημαίνει ότι αντιγράφουν το διφύο δεδομένων του άγρυπνου πράκτορα, επομένως τελικά περιέχουν όλοι το σωστό διφύο δεδομένων. Η απεικόνιση εξόδου ορίζεται ως $O(0, \cdot) = 1$ (που σημαίνει άρτια ισοτιμία ακμών) και $O(1, \cdot) = 0$ (που σημαίνει περιττή ισοτιμία ακμών). □

**Θεώρημα 17** (Σταθεροί Γείτονες - Κάποιος Κόμβος). *Η γλώσσα γραφημάτων $N_k^{out} = \{G \in \mathcal{G}_{con} \mid$ Το $G$ περιέχει κάποιο κόμβο με τουλάχιστον $k$ εξερχόμενους γείτονες$\}$ είναι σταθερά διαγνώσιμη για κάθε $k = \mathcal{O}(1)$ (το ίδιο ισχύει για την $\overline{N_k^{out}}$).*

*Απόδειξη.* Αρχικά όλοι οι πράκτορες είναι στην $q_0$ και όλες οι ακμές στην 0. Το σύνολο των καταστάσεων πρακτόρων είναι το $Q = \{q_0, \dots, q_k\}$, το σύνολο των καταστάσεων ακμών είναι δυαδικό και η συνάρτηση εξόδου ορίζεται ως $O(q_k) = 1$ και $O(q_i) = 0$ για κάθε $i \in \{0, \dots, k-1\}$. Περιγράφουμε τώρα τη συνάρτηση μεταβάσεων. Σε κάθε αλληλεπίδραση μέσω μίας ακμής που βρίσκεται στην κατάσταση 0, ο μυητής επισκέπτεται μία εξερχόμενη ακμή που δεν έχει ξαναεπισκεφθεί, επομένως τη σημαδεύει ανανεώνοντας την κατάστασή της στην τιμή 1 και αυξάνει το δικό του δείκτη κατάστασης κατά ένα, δηλαδή η αρχική $(q_0, q_0, 0)$ δίνει $(q_1, q_0, 1)$ και γενικά $(q_i, q_j, 0) \to (q_{i+1}, q_j, 1)$, εάν $i + 1 < k$ και $j < k$, και $(q_i, q_j, 0) \to (q_k, q_k, 1)$, διαφορετικά. Όποτε δύο πράκτορες συναντιούνται μέσω μίας σημαδεμένης ακμής, δεν κάνουν τίποτα, εκτός από την περίπτωση κατά την οποία ένας από αυτούς βρίσκεται στην ειδική κατάσταση συναγερμού $q_k$. Στην τελευταία αυτή περίπτωση, και οι δύο περνούν στην κατάσταση συναγερμού, αφού το πρωτόκολλο έχει εντοπίσει κάποιον πράκτορα με τουλάχιστον $k$ εξερχόμενους γείτονες. Συμπερασματικά, όλοι οι πράκτορες μετράνε τις εξερχόμενες ακμές τους και αρχικά δίνουν ως έξοδο την τιμή 0. Εάν και μόνο εάν κάποιος απ' αυτούς σημαδέψει την $k$-στή εξερχόμενη ακμή του, και τα δύο άκρα αυτής περνούν στην κατάσταση συναγερμού $q_k$ η οποία διαδίδεται σε όλο τον πληθυσμό και της οποίας η έξοδος είναι 1, υποδηλώνοντας ότι το $G$ ανήκει στην $N_k^{out}$. Προφανώς, το πρωτόκολλο που μόλις περιγράψαμε διαγιγνώσκει σταθερά την $N_k^{out}$, άρα τόσο η $N_k^{out}$ όσο και η $\overline{N_k^{out}}$ είναι σταθερά διαγνώσιμες. □

Παρατηρήστε ότι η $\overline{N_k^{out}}$ περιλαμβάνει όλα τα γραφήματα που δεν έχουν κανένα κόμβο με τουλάχιστον $k = \mathcal{O}(1)$ εξερχόμενους γείτονες, με άλλα λόγια όλοι οι κόμβοι έχουν λιγότερες από $k$ εξερχόμενες ακμές, το οποίο είναι το ευρέως γνωστό κατηγόρημα φραγμένου έξω βαθμού από $k$. Το αντίστοιχο θεώρημα για τα πρωτόκολλα πληθυσμών εμφανίζεται ως Λήμμα 2 στην [5].

**Θεώρημα 18** (Σταθεροί Γείτονες - Όλοι οι Κόμβοι). *Η γλώσσα γραφημάτων* $K_k^{out} =$

*$\{G \in \mathcal{G}_{con} \mid$ Κάθε κόμβος του $G$ έχει τουλάχιστον $k$ εξερχόμενους γείτονες$\}$ είναι σταθερά διαγνώσιμη για κάθε $k = \mathcal{O}(1)$ (το ίδιο ισχύει για την $\overline{K_k^{out}}$).*

*Απόδειξη.* Παρατηρήστε, πρώτα απ' όλα, ότι ένας εναλλακτικός τρόπος θεώρησης της $K_k^{out}$ είναι ως $K_k^{out} = \{G \in \mathcal{G}_{con} \mid$ Κανένας κόμβος του $G$ δεν έχει λιγότερους από $k$ εξερχόμενους γείτονες$\}$, για κάποιο $k = \mathcal{O}(1)$. Το πρωτόκολλο που περιγράφουμε είναι παρόμοιο με αυτό που περιγράφεται στην απόδειξη του Θεωρήματος 17. Η μόνη διαφορά είναι ότι όταν ένας πράκτορας μετράει τον $k$-στό εξερχόμενο γείτονά του ως ο μυητής μίας αλληλεπίδρασης, περνάει στην ειδική κατάσταση συναγερμού $q_k$, όμως αυτή εδώ δε διαδίδεται (π.χ. ο αποκρινόμενος αυτής της αλληλεπίδρασης διατηρεί την κατάστασή του). Προκύπτει ότι τελικά κάθε κόμβος που έχει σημαδέψει τουλάχιστον $k$ εξερχόμενες ακμές του θα βρίσκεται στην κατάσταση συναγερμού, ενώ κάθε άλλος κόμβος που έχει λιγότερες από $k$ εξερχόμενες ακμές θα βρίσκεται σε κάποια κατάσταση $q_i$, όπου $i < k$. Προφανώς, το πρωτόκολλο έχει σταθεροποιούμενες καταστάσεις και παρέχει την ακόλουθη ημιγραμμική εγγύηση:

- Εάν $G \notin K_k^{out}$ τότε τουλάχιστον ένας πράκτορας παραμένει σε κάποια κατάσταση $q_i$, όπου $i < k$.
- Εάν $G \in K_k^{out}$ δεν παραμένει καμία τέτοια κατάσταση.

Επομένως, εφαρμόζεται το Θεώρημα 14, πράγμα που σημαίνει ότι υπάρχει κάποιο ΠΠΔΔΓ που διαγιγνώσκει σταθερά την $K_k^{out}$ βάσει της σύμβασης εξόδου κατηγορημάτων. Επομένως, τόσο η $K_k^{out}$ όσο και η $\overline{K_k^{out}}$ είναι σταθερά διαγνώσιμες και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

**Παρατήρηση 4.** *Λόγω συμμετρίας, οι αντίστοιχες γλώσσες $N_k^{in}$, $\overline{N_k^{in}}$, $K_k^{in}$ και $\overline{K_k^{in}}$ που αφορούν σε εισερχόμενους γείτονες είναι επίσης ΠΠΔΔΓ-διαγνώσιμες για κάθε $k = \mathcal{O}(1)$.*

**Θεώρημα 19** (Σύγκριση Εισερχόμενων και Εξερχόμενων Γειτόνων)**.** *Η γλώσσα γραφημάτων* $M_{out} = \{G \in \mathcal{G}_{con} \mid$ *Το* $G$ *έχει κάποιο κόμβο με περισσότερους εξερχόμενους από εισερχόμενους γείτονες*$\}$ *είναι σταθερά διαγνώσιμη (το ίδιο ισχύει για την* $\overline{M}_{out}$*).*

*Απόδειξη.* Θεωρήστε το ακόλουθο πρωτόκολλο: Αρχικά όλοι οι πράκτορες βρίσκονται στην κατάσταση 0 η οποία είναι η κατάσταση *ισότητας*. Ένας πράκτορας μπορεί επίσης να βρίσκεται στην κατάσταση 1 η οποία είναι η κατάσταση *περισσότερων-εξερχομένων*. Αρχικά όλες οι ακμές βρίσκονται στην κατάσταση $s_0$ και το $S$ περιέχει επίσης τις $o$, $i$ και $b$, όπου η κατάσταση $o$ υποδηλώνει ότι η ακμή έχει χρησιμοποιηθεί μέχρι τώρα από το πρωτόκολλο μόνο ως εξερχόμενη, η $i$ ότι έχει χρησιμοποιηθεί μόνο ως εισερχόμενη και η $b$ ότι έχει χρησιμοποιηθεί και ως εισερχόμενη και ως εξερχόμενη. Κάθε πράκτορας θυμάται πάντα εάν έχει δει μέχρι τώρα περισσότερες εξερχόμενες ακμές ή ίσο αριθμό εισερχομένων και εξερχομένων ακμών. Επομένως, εάν βρίσκεται στην κατάσταση ισότητας και είναι ο μυητής σε μία αλληλεπίδραση όπου η ακμή δεν έχει ακόμα χρησιμοποιηθεί (κατάσταση $s_0$) ή έχει χρησιμοποιηθεί μόνο ως εισερχόμενη (κατάσταση $i$), το οποίο απλώς σημαίνει ότι την έχει προσμετρήσει ο αποκρινόμενος, τότε ο πράκτορας περνάει στην κατάσταση περισσότερων-εξερχομένων και ανανεώνει την ακμή αναλόγως για να θυμάται ότι την έχει προσμετρήσει. Παρομοίως, εάν ένας πράκτορας στην κατάσταση περισσότερων-εξερχομένων είναι ο αποκρινόμενος μίας αλληλεπίδραση και η ακμή βρίσκεται σε μία από τις καταστάσεις $s_0$ ή $o$, τότε περνάει στην κατάσταση ισότητας και ανανεώνει την ακμή αναλόγως. Εάν δούμε την αλληλεπίδραση από την οπτική της ακμής, τότε μπορούμε να διαχωρίσουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

1. Η ακμή βρίσκεται στην κατάσταση $s_0$. Τόσο ο μυητής όσο και ο αποκρινόμενος μπορούν να τη χρησιμοποιήσουν. Εάν τη χρησιμοποιήσει μόνο ο μυητής (τόσο ο μυητής όσο και ο αποκρινόμενος βρίσκονται στην κατάσταση ισότητας), τότε η ακμή περνάει στην κατάσταση $o$. Εάν τη χρησιμοποιήσει μόνο ο αποκρινόμενος (και οι δύο βρίσκονται στην κατάσταση περισσότερων-εξερχομένων) τότε η ακμή

περνάει στην κατάσταση $i$. Εάν τη χρησιμοποιήσουν και οι δύο (ο μυητής είναι στην κατάσταση ισότητας και ο αποκρινόμενος στην κατάσταση περισσότερων-εξερχομένων) τότε περνάει στην κατάσταση $b$. Εάν δεν την χρησιμοποιήσει κανείς τότε παραμένει στην $s_0$.

2. Η ακμή βρίσκεται στην κατάσταση $o$. Ο μυητής δε μπορεί να την χρησιμοποιήσει, αφού την έχει ήδη προσμετρήσει. Εάν ο αποκρινόμενος βρίσκεται στην κατάσταση περισσότερων-εξερχομένων, την προσμετράει, επομένως η ακμή περνάει στην κατάσταση $b$. Διαφορετικά, εάν βρίσκεται στην κατάσταση ισότητας η ακμή παραμένει στην κατάσταση $o$.

3. Η ακμή βρίσκεται στην κατάσταση $i$. Ο αποκρινόμενος δε μπορεί να την χρησιμοποιήσει. Εάν ο μυητής βρίσκεται στην κατάσταση ισότητας, την προσμετράει, επομένως η ακμή περνάει στην κατάσταση $b$. Διαφορετικά, εάν βρίσκεται στην κατάσταση περισσότερων εξερχομένων, η ακμή παραμένει στην κατάσταση $i$.

4. Η ακμή βρίσκεται στην κατάσταση $b$. Τόσο ο μυητής όσο και ο αποκρινόμενος την έχουν χρησιμοποιήσει επομένως δε συμβαίνει τίποτα.

Η κατάσταση ισότητας δίνει έξοδο 0 και η κατάσταση περισσότερων-εξερχομένων δίνει έξοδο 1. Εάν υπάρχει κάποιος κόμβος με περισσότερες εξερχόμενες ακμές, τότε θα παραμείνει τελικά στην κατάσταση περισσότερων-εξερχομένων δίνοντας έξοδο 1, διαφορετικά όλοι οι κόμβοι θα παραμείνουν τελικά στην κατάσταση ισότητας (παρότι κάποιοι από αυτούς μπορεί να έχουν περισσότερες εισερχόμενες ακμές), επομένως θα δίνουν έξοδο 0. Η διάγνωση του εάν μία κατάσταση περισσότερων-εξερχομένων παραμένει τελικά στον πληθυσμό είναι ημιγραμμική και το πρωτόκολλο προφανώς έχει σταθεροποιούμενες καταστάσεις, επομένως εφαρμόζεται το Θεώρημα 14 και συμπεραίνουμε ότι η $M_{out}$ είναι σταθερά διαγνώσιμη. Η κλειστότητα ως προς το συμπλήρωμα συνεπάγεται ότι η $\overline{M}_{out}$ είναι επίσης σταθερά διαγνώσιμη. $\square$

**Παρατήρηση 5.** *Λόγω συμμετρίας, οι αντίστοιχες γλώσσες* $M_{in} = \{G \in \mathcal{G}_{con} \mid$ *Το* $G$ *έχει κάποιο κόμβο με περισσότερους εισερχόμενους από εξερχόμενους γείτονες*$\}$ *και* $\overline{M}_{in}$ *είναι επίσης σταθερά διαγνώσιμες.*

**Θεώρημα 20** (Κατευθυντό Μονοπάτι Σταθερού Μήκους)**.** *Η γλώσσα γραφημάτων* $P_k = \{G \in \mathcal{G}_{con} \mid$ *Το* $G$ *έχει κάποιο κατευθυντό μονοπάτι που αποτελείται από τουλάχιστον* $k$ *ακμές*$\}$ *είναι σταθερά διαγνώσιμη για κάθε* $k = \mathcal{O}(1)$ *(το ίδιο ισχύει για την* $\overline{P}_k$*).*

*Απόδειξη.* Εάν $k = 1$, το πρωτόκολλο που διαγιγνώσκει σταθερά την $P_1$ είναι τετριμμένο, αφού αποδέχεται ανν συμβεί τουλάχιστον μία αλληλεπίδραση (στην πραγματικότητα μπορεί να αποδέχεται πάντα αφού όλα τα γραφήματα επικοινωνίας έχουν τουλάχιστον δύο κόμβους και είναι ασθενώς συνεκτικά, πράγμα το οποίο συνεπάγεται ότι $P_1 = \mathcal{G}_{con}$). Παρουσιάζουμε ένα γενικό πρωτόκολλο, $DirPath$ (Πρωτόκολλο 2), που διαγιγνώσκει σταθερά την $P_k$ για κάθε σταθερό $k > 1$.

Αρχικά, όλοι οι κόμβοι βρίσκονται στην $q_0$ και όλες οι ακμές στην 0. Το πρωτόκολλο προσπαθεί να επεκτείνει ανεξάρτητα μονοπάτια. Όταν εφαρμόζεται ο κανόνας $(q_0, q_0, 0) \rightarrow (q_1, 1, 1)$, ο μυητής περνάει στην $q_1$ υποδηλώνοντας ότι αποτελεί κόμβο κάποιου ενεργού μονοπατιού, ο αποκρινόμενος περνάει στην 1 υποδηλώνοντας ότι αποτελεί την κεφαλή ενός ενεργού μονοπατιού μήκους 1 και η ακμή περνάει στην 1 υποδηλώνοντας ότι αποτελεί μέρος ενός ενεργού μονοπατιού. Παρατηρώντας προσεκτικά τη συνάρτηση μεταβάσεων είναι εύκολο να δει κανείς ότι οι κόμβοι δύο ανεξάρτητων ενεργών μονοπατιών δε μπορούν να αλληλεπιδράσουν μεταξύ τους (στην πραγματικότητα, μπορούν αλλά η αλληλεπίδραση είναι αναποτελεσματική). Αυτό ισχύει επειδή όλοι οι κόμβοι που βρίσκονται στην $q_1$ δεν κάνουν τίποτα όταν αλληλεπιδρούν μέσω μίας ακμής που βρίσκεται στην κατάσταση 0. Επιπλέον, οι κεφαλές των μονοπατιών επεκτείνονται μόνο όταν αλληλεπιδρούν με κόμβους που βρίσκονται στην κατάσταση $q_0$, οι οποίοι προφανώς δε μπορούν να είναι κόμβοι ενεργών μονοπατιών (όλοι οι κόμβοι ενεργών μονοπατιών βρίσκονται στην $q_1$ εκτός από τις κεφαλές που βρίσκονται σε καταστάσεις από το σύνολο

**Πρωτόκολλο 2** *DirPath*

1: $Q = \{q_0, q_1, 1, \ldots, k\}$, $S = \{0, 1\}$,

2: $O(k) = 1$, $O(q) = 0$, για κάθε $q \in Q - \{k\}$,

3: $\delta$:

$$
\begin{aligned}
(q_0, q_0, 0) &\to (q_1, 1, 1) \\
(q_1, x, 1) &\to (x-1, q_0, 0), \text{ εάν } x \geq 2 \\
&\to (q_0, q_0, 0), \text{ εάν } x = 1 \\
(x, q_0, 0) &\to (q_1, x+1, 1), \text{ εάν } x+1 < k \\
&\to (k, k, 0), \text{ εάν } x+1 = k \\
(k, \cdot, \cdot) &\to (k, k, \cdot) \\
(\cdot, k, \cdot) &\to (k, k, \cdot)
\end{aligned}
$$

---

$\{1, \ldots, k-1\}$). Υπάρχουν δύο βασικά ενδεχόμενα για ένα ενεργό μονοπάτι: είτε το πρωτόκολλο το επεκτείνει, επομένως αυτό αποκτάει ακόμα ένα κόμβο και μία ακμή και ο μετρητής κεφαλής αυξάνεται κατά ένα, είτε το συρρικνώνει, επομένως απελευθερώνεται ένας κόμβος και μία ακμή και ο μετρητής κεφαλής μειώνεται κατά ένα. Τελικά, ένα μονοπάτι είτε θα απελευθερωθεί πλήρως (όλοι οι κόμβοι του και οι ακμές τους επανέρχονται στις αρχικές τους καταστάσεις) ή θα αποκτήσει μήκος $k$. Στην πρώτη περίπτωση, το πρωτόκολλο απλώς συνεχίζει να δουλεύει, αλλά στη δεύτερη βρέθηκε ένα μονοπάτι μήκους τουλάχιστον $k$ και η κατάσταση $k$ που δίνει έξοδο 1 διαδίδεται σε όλο τον πληθυσμό. Το κρίσιμο σημείο είναι ότι η κατάσταση $k$ είναι η μόνη κατάσταση που δίνει έξοδο 1 και μπορεί να εμφανιστεί και συνεπώς να διαδωθεί ανν υπάρχει κάποιο μονοπάτι μήκους τουλάχιστον $k$. Επιπλέον, εάν υπάρχει ένα τέτοιο μονοπάτι, λόγω της δικαιοσύνης, το πρωτόκολλο θα μπορέσει τελικά να το εντοπίσει. $\square$

## Μη Υπολογισιμότητα

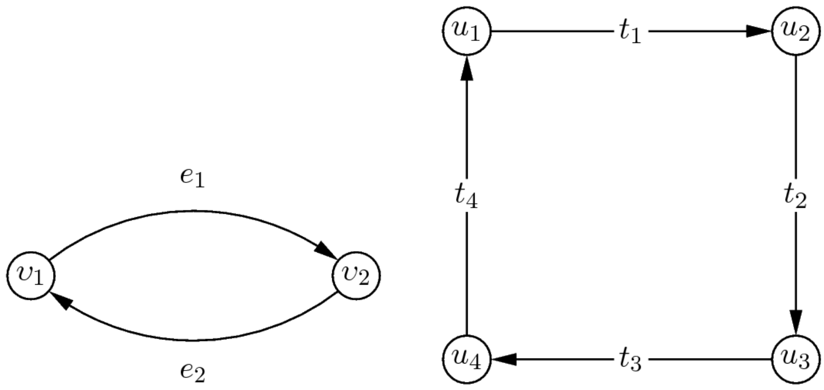
Τώρα είμαστε έτοιμοι να αποδείξουμε ότι μία συγκεκριμένη γλώσσα γραφημάτων δε διαγιγνώσκεται σταθερά από ΠΠΔΔΓ με σταθεροποιούμενες καταστάσεις. Πρώτα διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε ένα χρήσιμο λήμμα.

**Λήμμα 6.** *Για κάθε ΠΠΔΔΓ $\mathcal{A}$ και κάθε υπολογισμό $C_0, C_1, C_2, \ldots$ του $\mathcal{A}$ στο $G$ (Σχήμα 3.1(α′)) υπάρχει ένας υπολογισμός $C'_0, C'_1, C'_2, \ldots, C'_i, \ldots$ του $\mathcal{A}$ στο $G'$ (Σχήμα 3.1(β′)) τ.ώ.*

$$C_i(v_1) = C'_{2i}(u_1) = C'_{2i}(u_3),$$
$$C_i(v_2) = C'_{2i}(u_2) = C'_{2i}(u_4),$$
$$C_i(e_1) = C'_{2i}(t_1) = C'_{2i}(t_3) \text{ και}$$
$$C_i(e_2) = C'_{2i}(t_2) = C'_{2i}(t_4)$$

*για κάθε πεπερασμένο $i \geq 0$.*

*Απόδειξη.* Η απόδειξη είναι με επαγωγή στο $i$. Υποθέτουμε ότι αρχικά όλοι οι κόμβοι είναι στην κατάσταση $q_0$ και όλες οι ακμές στην $s_0$ (αρχικές καταστάσεις). Έτσι η βασική περίπτωση (βάση επαγωγής), για $i = 0$, ισχύει τετριμμένα. Τώρα κάνουμε την ακόλουθη παραδοχή: Όποτε ο δρομολογητής, έστω $S_1$, του $\mathcal{A}$ στο $G$ επιλέγει την ακμή $e_1$, υποθέτουμε ότι ο δρομολογητής $S_2$ του $\mathcal{A}$ στο $G'$ κάνει δύο βήματα· πρώτα επιλέγει την $t_1$ και μετά την $t_3$. Όποτε ο $S_1$ επιλέγει την ακμή $e_2$, ο $S_2$ πρώτα επιλέγει την $t_2$ και μετά την $t_4$. Τυπικά, εάν $C_{i-1} \xrightarrow{e_1} C_i$ τότε $C'_{2(i-1)} \xrightarrow{t_1} C'_{2i-1} \xrightarrow{t_3} C'_{2i}$ και εάν $C_{i-1} \xrightarrow{e_2} C_i$ τότε $C'_{2(i-1)} \xrightarrow{t_2} C'_{2i-1} \xrightarrow{t_4} C'_{2i}$ για κάθε πεπερασμένο $i \geq 1$. Προφανώς, ο $S_2$ δεν είναι δίκαιος δρομολογητής. Έτσι, για να είμαστε σε θέση να μιλάμε για υπολογισμό, απαιτούμε αυτή η προαποφασισμένη συμπεριφορά να ακολουθείται από τον $S_2$ για πεπερασμένο αριθμό βημάτων. Μετά από αυτόν τον πεπερασμένο αριθμό βημάτων ο $S_2$ συνεχίζει αυθαίρετα αλλά πλέον με δίκαιο τρόπο.




(α′) Το γράφημα $G$ (β′) Το γράφημα $G'$

Σχήμα 3.1. $G \in 2C$ και $G' \notin 2C$.

Υποθέτουμε τώρα ότι όλες οι συνθήκες ικανοποιούνται για κάποιο πεπερασμένο βήμα (επαγωγική υπόθεση). Θα αποδείξουμε ότι το ίδιο ισχύει και για το βήμα $i+1$ ολοκληρώνοντας έτσι την απόδειξη (επαγωγικό βήμα). Υπάρχουν δύο περιπτώσεις:

1. $C_i \xrightarrow{e_1} C_{i+1}$ *(δηλαδή στο βήμα* $i+1$ *ο* $S_1$ *επιλέγει την ακμή* $e_1$*)*: Τότε γνωρίζουμε ότι ο $S_2$ επιλέγει πρώτα την $t_1$ και μετά την $t_3$ (στα αντίστοιχα δικά του βήματα $2i+1$ και $2i+2$). Δηλαδή η πρώτη του μετάβαση είναι η $C'_{2i} \xrightarrow{t_1} C'_{2i+1}$ και η δεύτερη η $C'_{2i+1} \xrightarrow{t_3} C'_{2(i+1)}$. Όμως από την επαγωγική υπόθεση γνωρίζουμε ότι $C'_{2i}(u_1) = C_i(v_1)$, $C'_{2i}(u_2) = C_i(v_2)$ και $C'_{2i}(t_1) = C_i(e_1)$ πράγμα που σημαίνει απλά ότι η αλληλεπίδραση $e_1$ έχει στο $G$ το ίδιο αποτέλεσμα με αυτό που έχει η $t_1$ στο $G'$ (ο $u_1$ βρίσκεται στην ίδια κατάσταση με τον $v_1$, ο $u_2$ στην ίδια με τον $v_2$ και η $t_1$ στην ίδια με την $e_1$). Επομένως, $C'_{2i+1}(u_1) = C_{i+1}(v_1)$, $C'_{2i+1}(u_2) = C_{i+1}(v_2)$ και $C'_{2i+1}(t_1) = C_{i+1}(e_1)$. Επίσης, σε αυτό το βήμα η $t_3$ καθώς και τα δύο άκρα της δεν τροποποιούν την κατάστασή τους (αφού η αλληλεπίδραση αφορούσε την $t_1$), άρα $C'_{2i+1}(u_3) = C'_{2i}(u_3) = C_i(v_1)$ (η τελευταία εξίσωση προκύπτει απ' την επαγωγική υπόθεση), $C'_{2i+1}(u_4) = C'_{2i}(u_4) = C_i(v_2)$ και $C'_{2i+1}(t_3) = C'_{2i}(t_3) = C_i(e_1)$. Όταν στο επόμενο βήμα ο $S_2$ επιλέγει την $t_3$, η $t_1$ καθώς και τα δύο άκρα της δεν έχουν αλλάξει κατάσταση, άρα $C'_{2(i+1)}(u_1) = C'_{2i+1}(u_1) = C_{i+1}(v_1)$,

$C'_{2(i+1)}(u_2) = C'_{2i+1}(u_2) = C_{i+1}(\upsilon_2)$ και $C'_{2(i+1)}(t_1) = C'_{2i+1}(t_1) = C_{i+1}(e_1)$. Ας δούμε τώρα τι συμβαίνει στην $t_3$ και τα άκρα της. Πριν την αλληλεπίδραση η κατάσταση του $u_3$ είναι $C_i(\upsilon_1)$, του $u_4$ είναι $C_i(\upsilon_2)$ και της $t_3$ είναι $C_i(e_1)$, πράγμα που σημαίνει ότι, κατά τη $C'_{2(i+1)}$, ο $u_3$ έχει μεταβεί στην $C_{i+1}(\upsilon_1)$, ο $u_4$ στην $C_{i+1}(\upsilon_2)$ και η $t_3$ στην $C_{i+1}(e_1)$. Τελικά, η $t_2$ και η $t_4$ δεν έχουν λάβει μέρος σε καμία από τις δύο αλληλεπιδράσεις του $S_2$ και επομένως έχουν διατηρήσει τις καταστάσεις τους, δηλαδή $C'_{2(i+1)}(t_2) = C'_{2i}(t_2) = C_i(e_2) = C_{i+1}(e_2)$ (η τελευταίες δύο εξισώσεις προκύπτουν απ' την επαγωγική υπόθεση και το γεγονός ότι στο βήμα $i+1$ ο $S_1$ επιλέγει την $e_1$ που σημαίνει ότι η $e_2$ διατηρεί την κατάστασή της, αντίστοιχα), και ομοίως $C'_{2(i+1)}(t_4) = C_{i+1}(e_2)$.

2. $C_i \xrightarrow{e_2} C_{i+1}$ *(δηλαδή στο βήμα $i+1$ ο $S_1$ επιλέγει την ακμή $e_2$)*: Η περίπτωση αυτή είναι συμμετρική με την προηγούμενη.

$\square$

Έστω τώρα $\mathcal{A}$ ένα ΠΠΔΔΓ που διαγιγνώσκει σταθερά τη γλώσσα γραφημάτων $2C = \{G \in \mathcal{G}_{con} \mid$ Το $G$ έχει τουλάχιστον δύο κόμβους $u$, $\upsilon$ τ.ώ. $(u, \upsilon), (\upsilon, u) \in E(G)$ (με άλλα λόγια, το $G$ έχει τουλάχιστον έναν 2-κύκλο)$\}$. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε υπολογισμό του $\mathcal{A}$ στο $G$, μετά από πεπερασμένο αριθμό βημάτων, τόσο ο $\upsilon_1$ όσο και ο $\upsilon_2$ περνούν σε κάποια κατάσταση που δίνει έξοδο 1, αφού $G \in 2C$, και δεν τροποποιούν την τιμή εξόδου τους σε κανένα επόμενο βήμα (έστω $C_i$ η αντίστοιχη φάση σταθερής εξόδου, όπου το $i$ είναι πεπερασμένο). Όμως, σύμφωνα με το Λήμμα 6, υπάρχει ένας υπολογισμός του $\mathcal{A}$ στο $G'$ στον οποίο κατά τη φάση $C'_{2i}$ οι πράκτορες $u_1$, $u_2$, $u_3$ και $u_4$ δίνουν έξοδο 1. Χρησιμοποιούμε αυτό το γεγονός για να αποδείξουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

**Θεώρημα 21.** *Δεν υπάρχει ΠΠΔΔΓ με σταθεροποιούμενες καταστάσεις που να διαγιγνώσκει σταθερά τη γλώσσα γραφημάτων $2C = \{G \in \mathcal{G}_{con} \mid$ Το $G$ έχει τουλάχιστον* *δύο κόμβους $u$, $\upsilon$ τ.ώ. $(u,\upsilon),(\upsilon,u) \in E(G)$ (με άλλα λόγια, το $G$ έχει τουλάχιστον έναν 2-κύκλο)$\}$.*

*Απόδειξη.* Έστω $\mathcal{A}$ ένα ΠΠΔΔΓ με σταθεροποιούμενες καταστάσεις που διαγιγνώσκει σταθερά την $2C$. Προκύπτει ότι όταν το $\mathcal{A}$ τρέχει στο $G$ (Σχήμα 3.1(α')), μετά από πεπερασμένο αριθμό βημάτων οι $\upsilon_1$ και $\upsilon_2$ θα βρεθούν χ.β.τ.γ. σε κάποιες καταστάσεις $q_1$ και $q_2$, αντίστοιχα, που δίνουν έξοδο 1 (αφού το $\mathcal{A}$ διαγιγνώσκει σταθερά την $\mathcal{A}$) και που δεν τροποποιούνται σε κανένα μετέπειτα βήμα (αφού το $\mathcal{A}$ έχει σταθεροποιούμενες καταστάσεις). Ας υποθέσουμε ότι τη στιγμή αυτή η $e_1$ βρίσκεται στην $s_1$ και η $e_2$ στην $s'_1$. Ας υποθέσουμε επίσης ότι υπάρχει κάποιο υποσύνολο $S_1 = \{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$ του $S$, που αποτελείται από τις καταστάσεις ακμών εκείνες οι οποίες είναι προσβάσιμες μέσω διαδοχικών αλληλεπιδράσεων του ζεύγους $(\upsilon_1, \upsilon_2)$ και ένα υποσύνολο $S_2 = \{s'_1, s'_2, \ldots, s'_l\}$ του $S$, που αποτελείται από εκείνες τις καταστάσεις ακμών που είναι προσβάσιμες μέσω διαδοχικών αλληλεπιδράσεων του ζεύγους $(\upsilon_2, \upsilon_1)$, όπου $k$ και $l$ είναι σταθερές ανεξάρτητες του $n$ (παρατηρήστε ότι τα $S_1$ και $S_2$ δεν είναι απαραιτήτως ξένα σύνολα). Προκύπτει ότι για κάθε $s_i \in S_1$, $(q_1, q_2, s_i) \to (q_1, q_2, s_j)$, όπου $s_j \in S_1$, και για κάθε $s'_i \in S_2$, $(q_2, q_1, s'_i) \to (q_2, q_1, s'_j)$, όπου $s'_j \in S_2$. Με απλά λόγια, καμία από αυτές τις προσβάσιμες καταστάσεις ακμών δε μπορεί να ευθύνεται για κάποια αλλαγή στην κατάσταση ενός πράκτορα. Σύμφωνα με το Λήμμα 6, υπάρχει ένας υπολογισμός του $\mathcal{A}$ στο $G'$ (Σχήμα 3.1(β')) τ.ώ. μετά από πεπερασμένο αριθμό βημάτων οι $u_1$, $u_3$ θα βρίσκονται στην $q_1$, οι $u_2$, $u_4$ στην $q_2$, οι $t_1$, $t_3$ στην $s_1$ και οι $t_2$, $t_4$ στην $s'_1$. Αφού το $\mathcal{A}$ διαγιγνώσκει την $2C$, σε κάποιο μετέπειτα πεπερασμένο βήμα (αφού αφήσουμε το πρωτόκολλο να τρέξει δίκαια στο $G'$), κάποιος πράκτορας θα βρεθεί σε μία νέα κατάσταση $q_3$, αφού εάν δε γινόταν αυτό, τότε όλοι οι πράκτορες θα παρέμεναν για πάντα στις καταστάσεις $q_1$ και $q_2$ που δίνουν έξοδο 1 (όμως στο $G'$ δεν υπάρχει 2-κύκλος και μία τέτοια απόφαση είναι λανθασμένη). Αυτό πρέπει να συμβεί μέσω κάποιας αλληλεπίδρασης μίας εκ των ακόλουθων δύο μορφών:

1. $(q_1, q_2, s_i)$, όπου $s_i \in S_1$,

2. $(q_2, q_1, s'_i)$, όπου $s'_i \in S_2$.

Όμως αυτό είναι άτοπο, αφού δείξαμε προηγουμένως ότι καμία τέτοια αλληλεπίδραση δε μπορεί να τροποποιήσει την κατάσταση κανενός από τα άκρα της. Διαισθητικά, εάν υπάρχει κάποιος τρόπος να τροποποιήσει το $\mathcal{A}$ μία εκ των $q_1$ και $q_2$ στο $G'$ τότε θα υπάρχει επίσης και κάποιος τρόπος να τροποποιήσει μία από αυτές τις καταστάσεις και στο $G$ παρότι το σύστημα έχει ήδη αποκτήσει σταθερές καταστάσεις, το οποίο είναι προφανώς άτοπο. □

Ως άμεση συνέπεια (ειδική περίπτωση) παίρνουμε το ακόλουθο πόρισμα:

**Πόρισμα 3.** *Δεν υπάρχει ΠΠΔΔΓ που σε κάθε υπολογισμό σε κάθε $G \in 2C$ να σταθεροποιείται σε μία μόνο κατάσταση, π.χ. διαδίδοντας μία κατάσταση συναγερμού όποτε βρίσκει έναν 2-κύκλο, το οποίο να διαγιγνώσκει σταθερά την $2C$.*

### 3.2.2 Μη Συνεκτικά Γραφήματα

Εδώ το σύμπαν είναι το $\mathcal{G}_{all}$ (ανακαλέστε τον ορισμό του απ' την Ενότητα 1.3.2) και, επομένως μία γλώσσα γραφημάτων μπορεί να είναι μόνο κάποιο υποσύνολο του $\mathcal{G}_{all}$. Κάθε μη συνεκτικό γράφημα $G$ του $\mathcal{G}_{all}$ αποτελείται από (ασθενώς ή ισχυρώς συνεκτικές) συνιστώσες $G_1, G_2, \ldots, G_t$, όπου $t \geq 2$ (παρατηρήστε επίσης ότι κάθε συνιστώσα πρέπει να έχει τουλάχιστον δύο κόμβους, για να μπορεί να λάβει χώρα υπολογισμός).

**Λήμμα 7.** *Για κάθε μη τετριμμένη γλώσσα γραφημάτων $L$, υπάρχει κάποιο μη συνεκτικό γράφημα $G$ στην $L$ όπου τουλάχιστον μία συνιστώσα του $G$ δεν ανήκει στην $L$ ή υπάρχει κάποιο μη συνεκτικό γράφημα $G'$ στην $\overline{L}$ όπου τουλάχιστον μία συνιστώσα του $G'$ δεν ανήκει στην $\overline{L}$ (ή και τα δύο).*

*Απόδειξη.* Έστω $L$ μία τέτοια μη τετριμμένη γλώσσα γραφημάτων και έστω ότι η πρόταση δεν ισχύει. Τότε για κάθε μη συνεκτικό γράφημα της $L$, όλες οι συνιστώσες του ανήκουν επίσης στην $L$ και για κάθε μη συνεκτικό γράφημα στην $\overline{L}$, όλες οι συνιστώσες του ανήκουν επίσης στην $\overline{L}$. Υπάρχουν δύο βασικές περιπτώσεις:

1. Η $L$ περιέχει όλα τα συνεκτικά γραφήματα. Όμως η $\overline{L}$ είναι μη τετριμμένη, πράγμα το οποίο σημαίνει ότι θα πρέπει να περιέχει τουλάχιστον ένα μη συνεκτικό γράφημα. Γνωρίζουμε ότι για κάθε μη συνεκτικό γράφημα της $\overline{L}$ όλες οι συνεκτικές συνιστώσες του ανήκουν στην $\overline{L}$, όμως αυτό είναι άτοπο, αφού όλα τα συνεκτικά γραφήματα ανήκουν στην $L$.

2. Η $L$ δεν περιέχει όλα τα συνεκτικά γραφήματα. Υπάρχουν τώρα δύο πιθανές υποπεριπτώσεις:

   (α′) Η $L$ περιέχει τουλάχιστον ένα συνεκτικό γράφημα (αλλά όχι όλα). Αυτό σημαίνει ότι η $\overline{L}$ περιέχει επίσης τουλάχιστον ένα συνεκτικό γράφημα. Έστω $G' = (V', E')$ ένα συνεκτικό γράφημα της $L$ και $G'' = (V'', E'')$ ένα συνεκτικό γράφημα της $\overline{L}$. Η ανεξάρτητη ένωση των $G'$ και $G''$, $U = (V' \cup V'', E' \cup E'')$, είναι ένα μη συνεκτικό γράφημα που αποτελείται από δύο συνεκτικές συνιστώσες, εκ των οποίων η μία ανήκει στην $L$ και η άλλη στην $\overline{L}$. Το ίδιο το $U$ θα πρέπει να ανήκει σε μία εκ των $L$ και $\overline{L}$ πράγμα που σημαίνει ότι όλες οι συνιστώσες του θα πρέπει να ανήκουν στην $L$ ή όλες στην $\overline{L}$, το οποίο είναι άτοπο.

   (β′) Η $L$ δεν περιέχει κανένα συνεκτικό γράφημα. Επομένως, αφού η $L$ είναι μη τετριμμένη, περιέχει τουλάχιστον ένα μη συνεκτικό γράφημα του οποίου οι συνεκτικές συνιστώσες ανήκουν στην $L$. Όμως όλα τα συνεκτικά γραφήματα ανήκουν στην $\overline{L}$ το οποίο είναι άτοπο.

□

**Θεώρημα 22.** *Καμία μη τετριμμένη γλώσσα γραφημάτων $L \subset \mathcal{G}_{all}$ δεν είναι σταθερά διαγνώσιμη απ' το μοντέλο ΠΠΔΔΓ.*

*Απόδειξη.* Έστω $L$ μία τέτοια γλώσσα και υποθέστε ότι υπάρχει ένα ΠΠΔΔΓ $\mathcal{A}_L$ που τη διαγιγνώσκει σταθερά. Επομένως, το $\mathcal{A}_L$ κάνει όλους τους πράκτορες του $G$ να δώσουν έξοδο 1 εάν $G \in L$ και έξοδο 0 εάν $G \notin L$. Επιπλέον, το πρωτόκολλο $\mathcal{A}_{\overline{L}}$, που είναι ίδιο με το $\mathcal{A}_L$ αλλά διαθέτει συμπληρωματική απεικόνιση εξόδου, διαγιγνώσκει σταθερά την $\overline{L}$. Αυτά τα ΠΠΔΔΓ (και στην πραγματικότητα κάθε ΠΠΔΔΓ) δε μπορούν να μεταδώσουν δεδομένα μεταξύ πρακτόρων που ανήκουν σε διαφορετικές συνιστώσες όταν εκτελούνται σε μη συνεκτικά γραφήματα. Στην πραγματικότητα, είναι τετριμμένο να δει κανείς ότι, όταν εκτελούνται σε μη συνεκτικά γραφήματα, αυτά τα πρωτόκολλα στην ουσία εκτελούνται ανεξάρτητα στις διάφορες συνιστώσες των γραφημάτων. Αυτό σημαίνει ότι όταν, για παράδειγμα, το $\mathcal{A}_L$ εκτελείται στο μη συνεκτικό γράφημα $G$, όπου το $G$ έχει τουλάχιστον δύο συνιστώσες $G_1, G_2, \ldots, G_t$, τότε στην πραγματικότητα εκτελούνται $t$ διαφορετικά αντίγραφα του $\mathcal{A}_L$, ένα σε κάθε συνιστώσα, και κάθε αντίγραφο διαγιγνώσκει τη συμμετοχή στη γλώσσα $L$ της αντίστοιχης συνιστώσας (στην οποία εκτελείται). Το ίδιο ισχύει και για το $\mathcal{A}_{\overline{L}}$. Από το Λήμμα 7 υπάρχει τουλάχιστον ένα μη συνεκτικό γράφημα στην $L$ όπου τουλάχιστον μία συνιστώσα του ανήκει στην $\overline{L}$ ή τουλάχιστον ένα μη συνεκτικό γράφημα στην $\overline{L}$ όπου τουλάχιστον μία συνιστώσα του ανήκει στην $L$. Εάν η $L$ περιέχει ένα τέτοιο μη συνεκτικό γράφημα τότε, προφανώς, όταν το $\mathcal{A}_L$ εκτελείται σε αυτό το γράφημα $G$, όλοι οι κόμβοι των συνιστωσών που ανήκουν στην $\overline{L}$ θα δίνουν τελικά έξοδο 0. Αυτό είναι άτοπο αφού $G \in L$ και το $\mathcal{A}_L$ διαγιγνώσκει την $L$, το οποίο σημαίνει ότι όλοι οι πράκτορες πρέπει να δίνουν τελικά έξοδο 1. Εάν η $\overline{L}$ περιέχει ένα τέτοιο μη συνεκτικό γράφημα τότε το άτοπο προκύπτει με συμμετρικό τρόπο. $\square$

Ως άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 22 παίρνουμε το ακόλουθο πόρισμα:

**Πόρισμα 4.** *Η γλώσσα γραφημάτων* $C = \{G \in \mathcal{G}_{all} \mid$ *Το* $G$ *είναι (ασθενώς) συνεκτικό*$\}$ *δεν είναι σταθερά διαγνώσιμη.*

*Απόδειξη.* Η $C$ είναι μία μη τετριμμένη γλώσσα γραφημάτων και εφαρμόζουμε το Θεώρημα 22. □

Παρατηρήστε ότι η $C$ είναι η ιδιότητα της συνεκτικότητας και έχει κάποιο νόημα μόνο αν οριστεί ως προς το $\mathcal{G}_{all}$. Εάν ήταν σταθερά διαγνώσιμη τότε θα μπορούσαμε να γνωρίζουμε εάν ένα δοθέν γράφημα επικοινωνίας είναι συνεκτικό ή όχι, όμως σύμφωνα με το προηγούμενο πόρισμα βλέπουμε ότι αυτό δεν είναι δυνατό στο μοντέλο ΠΠΔΔΓ.

# Κεφάλαιο 4

# Παθητικά Κινούμενες Μηχανές που Χρησιμοποιούν Περιορισμένο Χώρο

## 4.1 Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο θεωρούμε κάθε πράκτορα ως μία ΤΜ. Συγκεκριμένα, προτείνουμε ένα νέο θεωρητικό μοντέλο για παθητικά κινούμενα δίκτυα αισθητήρων, το οποίο καλούμε μοντέλο *Παθητικά κινούμενων Μηχανών* (ΠΜ). Εστιάζουμε κυρίως σε πρωτόκολλα ΠΜ που χρησιμοποιούν χώρο $\mathcal{O}(\log n)$ τα οποία καλούμε πρωτόκολλα *ΠΑΛΟΜΑ (ΠΑθητικά κινούμενες ΛΟγαριθμικού χώρου ΜηχΑνές)*. Ο λόγος για τον οποίο μελετάμε αυτά τα συγκεκριμένα πρωτόκολλα είναι ότι η υπόθεση *λογαριθμικών μηχανών που επικοινωνούν* μοιάζει πιο φυσική από αυτόματα που επικοινωνούν και έχουν σταθερή μνήμη. Πρώτα απ' όλα, η υπόθεση *μηχανών που επικοινωνούν* είναι απόλυτα συμβατή με την σύγχρονη τεχνολογία (π.χ. κινητά τηλέφωνα, iPods, PDAs κ.ο.κ.). Επιπλέον, η *λογαριθμική μνήμη* είναι στην πραγματικότητα *εξαιρετικά μικρή*. Για να πειστεί ο αναγνώστης αρκεί να αναφερθεί ότι για ένα πληθυσμό που αποτελείται από $2^{266}$ πράκτορες, αριθμός μεγαλύτερος από το πλήθος των ατόμων στο ορατό διάστημα, απαιτούμε κάθε πράκτορας να διαθέτει μόνο 266 κελιά μνήμης (την ίδια στιγμή που οι σύγχρονες μνήμες φλας ξεπερνούν τα 16GB αποθηκευτικής χωρητικότητας)! Παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον το γεγονός ότι (όπως θα δείξουμε) οι πράκτορες των πρωτοκόλλων ΠΑΛΟΜΑ μπορούν να αυτοοργανωθούν σε μία κατανεμημένη ανταιτιοκρατική TM χώρου $\mathcal{O}(n \log n)$! Η μηχανή, όπως και αυτή του Θεωρήματος 10, αντλεί την ανταιτιοκρατία της από την εγγενή ανταιτιοκρατία του προτύπου αλληλεπιδράσεων. Επιπλέον, όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, το χωρικό φράγμα $\log n$ αποτελεί ένα αρκετά ιδιαίτερο φράγμα αφού εμφανίζει κάποια συμπεριφορά κατωφλίου ως προς την υπολογιστική ισχύ του μοντέλου ΠΜ. Το γεγονός αυτό σε συνδυασμό με την παραπάνω συζήτηση το καθιστά ίσως το καταλληλότερο χωρικό φράγμα γι' αυτού του είδους τα συστήματα.

Στην Ενότητα 4.2, ξεκινάμε με έναν τυπικό ορισμό του μοντέλου ΠΜ. Η ενότητα προχωράει με μία ενδελεχή περιγραφή της λειτουργικότητας των υπό εξέταση συστημάτων και εν συνεχεία παρέχει ορισμούς για τις φάσεις και τις δίκαιες εκτελέσεις. Ακόμα, ορίζονται ο σταθερός υπολογισμός στο νέο μοντέλο και η κλάση πολυπλοκότητας $PMSPACE(f(n))$ (σταθερά υπολογίσιμα κατηγορήματα απ' το μοντέλο ΠΜ όταν χρησιμοποιείται χώρος $\mathcal{O}(f(n))$). Στην Υποενότητα 4.2.1, παρουσιάζονται δύο απλά παραδείγματα πρωτοκόλλων ΠΑΛΟΜΑ τα οποία, καθώς υπολογίζουν μη ημιγραμμικά κατηγορήματα, δείχνουν ότι γενικά τα ΠΑΛΟΜΑ πρωτόκολλα είναι αυστηρά πιο ισχυρά απ' τα ΠΠ. Στην Ενότητα 4.3, αποδεικνύουμε αρχικά ότι τα πρωτόκολλα ΠΜ μπορούν να υποθέτουν την ύπαρξη μοναδικών διαδοχικών προσδιοριστών και γνώση του μεγέθους του πληθυσμού με χωρικό κόστος $\mathcal{O}(\log n)$ (Θεώρημα 24). Εκμεταλλευόμενο αυτή τη γνώση και χωρίς να αυξάνει την τάξη του απαιτούμενου χώρου, το μοντέλο ΠΜ μπορεί να προσομοιώσει μία TM χώρου $\mathcal{O}(n \log n)$ (Θεώρημα 25), το οποίο καθιερώνει ότι η $SSPACE(n \log n)$ είναι υποσύνολο της $PLM$ ($\equiv PMSPACE(\log n)$). Στην Ενότητα 4.4, προχωράμε ακόμα ένα βήμα και δείχνουμε ότι $SNSPACE(n \log n) \subseteq PLM$.

Συγκεκριμένα, δείχνουμε ότι το μοντέλο ΠΜ, χρησιμοποιώντας χώρο $\mathcal{O}(\log n)$, προσομοιώνει το μοντέλο ΠΚ των Guerraoui και Ruppert [39] (αυτός ο εγκλεισμός προκύπτει και εναλλακτικά μέσω απευθείας προσομοίωσης μίας ανταιτιοκρατικής ΤΜ στο Θεώρημα 29). Τέλος, στην Ενότητα 4.5 δείχνουμε ότι η $SNSPACE(n \log n)$ αποτελεί έναν ακριβή χαρακτηρισμό για την $PLM$, αποδεικνύοντας ότι η γλώσσα που αντιστοιχεί σε κάθε κατηγόρημα της $PLM$ μπορεί να διαγνωστεί από μία ανταιτιοκρατική ΤΜ χώρου $\mathcal{O}(n \log n)$.

## 4.2 Τυπικός Ορισμός του Μοντέλου

Στην παρούσα ενότητα ορίζουμε τυπικά το μοντέλο ΠΜ και περιγράφουμε τη λειτουργικότητά του. Δίνουμε και πάλι ορισμούς για πλήρη γραφήματα επικοινωνίας και μη φραγμένες μνήμες, παρότι μας ενδιαφέρουν πλήρη γραφήματα και μνήμες χωρικά φραγμένες από ένα λογάριθμο στο μέγεθος του πληθυσμού.

**Ορισμός 11.** *Ένα πρωτόκολλο ΠΜ είναι μία 6-άδα $(X, \Gamma, Q, \delta, \gamma, q_0)$ όπου τα $X$, $\Gamma$ και $Q$ είναι όλα πεπερασμένα σύνολα και*

1. *$X$ είναι το* αλφάβητο εισόδου, *όπου $\sqcup \notin X$,*
2. *$\Gamma$ είναι το* αλφάβητο ταινίας, *όπου $\sqcup \in \Gamma$ και $X \subset \Gamma$,*
3. *$Q$ είναι το σύνολο* καταστάσεων,
4. *$\delta : Q \times \Gamma^4 \to Q \times \Gamma^4 \times \{L, R\}^4 \times \{0, 1\}$ είναι η* εσωτερική συνάρτηση μεταβάσεων,
5. *$\gamma : Q \times Q \to Q \times Q$ είναι η* εξωτερική συνάρτηση μεταβάσεων *(ή* συνάρτηση μεταβάσεων αλληλεπιδράσεων*) και*
6. *$q_0 \in Q$ είναι η* αρχική κατάσταση.

Κάθε πράκτορας είναι εφοδιασμένος με τα ακόλουθα:

- Έναν *αισθητήρα* ούτως ώστε να αισθάνεται το περιβάλλον και να λαμβάνει την είσοδό του.

- Τέσσερις *ταινίες* ανάγνωσης/εγγραφής: την *ταινία εργασίας*, την *ταινία εξόδου*, την *ταινία εισερχομένων μηνυμάτων* και την *ταινία εξερχομένων μηνυμάτων*. Υποθέτουμε ότι όλες οι ταινίες είναι φραγμένες από τ' αριστερά και μη φραγμένες προς τα δεξιά.

- Μία *μονάδα ελέγχου* που περιέχει την κατάσταση του πράκτορα και εφαρμόζει τις συναρτήσεις μεταβάσεων.

- Τέσσερις *κεφαλές* (μία για κάθε ταινία) που διαβάζουν και γράφουν στα κελιά των αντίστοιχων ταινιών και μπορούν να κινούνται ένα βήμα τη φορά είτε προς τ' αριστερά είτε προς τα δεξιά.

- Μία δυαδική *σημαία εργασίας* που παίρνει είτε την τιμή 1, που σημαίνει ότι ο πράκτορας *εργάζεται* εσωτερικά, ή 0 που σημαίνει ότι ο πράκτορας είναι *έτοιμος* για αλληλεπίδραση.

Αρχικά, όλοι οι πράκτορες βρίσκονται στην κατάσταση $q_0$, η σημαία εργασίας έχει την τιμή 1 και όλα τα κελιά τους περιέχουν το *κενό σύμβολο* $\sqcup$. Υποθέτουμε και εδώ ότι όλοι οι πράκτορες λαμβάνουν την είσοδό τους ταυτόχρονα ως απόκριση σε ένα καθολικό σήμα εκκίνησης. Η είσοδος κάθε πράκτορα είναι ένα σύμβολο από το $X$ και γράφεται στο αριστερότερο κελί της ταινίας εργασίας.

Όταν η σημαία εργασίας έχει την τιμή 1, μπορούμε να σκεφτόμαστε ότι ο πράκτορας λειτουργεί ως μία συνηθισμένη μηχανή Turing (μόνο που επιπρόσθετα γράφει τη σημαία εργασίας). Συγκεκριμένα, όσο η σημαία εργασίας έχει την τιμή 1 εφαρμόζεται η εσωτερική συνάρτηση μεταβάσεων $\delta$, η μονάδα ελέγχου διαβάζει τα σύμβολα κάτω από τις κεφαλές και την ίδια της την κατάσταση, τα ανανεώνει όλα, μετακινεί κάθε κεφαλή ένα βήμα αριστερά ή δεξιά και θέτει τη σημαία εργασίας στην τιμή 0 ή 1, σύμφωνα πάντα με τη $\delta$.

Ένας δίκαιος εχθρικός δρομολογητής καθορίζει και εδώ τη σειρά με την οποία συμβαίνουν οι αλληλεπιδράσεις. Υποθέστε ότι δύο πράκτορες $u$ και $\upsilon$ είναι έτοιμοι να αλληλεπιδράσουν με τον $u$ να παίζει το ρόλο του μυητή και τον $\upsilon$ του αποκρινόμενου. Έστω $f : V \to \{0, 1\}$ μία συνάρτηση που επιστρέφει την τρέχουσα τιμή της σημαίας εργασίας κάθε πράκτορα. Αν τουλάχιστον μία εκ των $f(u)$ και $f(\upsilon)$ είναι ίση με 1, τότε δε συμβαίνει τίποτα, επειδή τουλάχιστον ένας πράκτορας εργάζεται εσωτερικά. Διαφορετικά ($f(u) = f(\upsilon) = 0$), και οι δύο πράκτορες είναι έτοιμοι και εγκαθιδρύεται μία αλληλεπίδραση. Στην τελευταία περίπτωση, εφαρμόζεται η εξωτερική συνάρτηση μεταβάσεων $\gamma$, οι καταστάσεις των πρακτόρων ανανεώνονται σύμφωνα με αυτή, το εξερχόμενο μήνυμα του μυητή αντιγράφεται στα αριστερότερα κελιά της ταινίας εισερχομένων μηνυμάτων του αποκρινόμενου (αντικαθιστώντας τα περιεχόμενά της και γράφοντας $\sqcup$ σε όλα τα υπόλοιπα κελιά που προηγουμένως ήταν μη κενά) και αντιστρόφως (η διαδικασία αυτή καλείται *ανταλλαγή μηνυμάτων*) και τέλος οι σημαίες εργασίας και των δύο πρακτόρων τίθενται και πάλι στην τιμή 1. Αυτές οι λειτουργίες θεωρούνται *ατομικές*, δηλαδή οι πράκτορες που αλληλεπιδρούν δε μπορούν να συμμετάσχουν σε άλλη αλληλεπίδραση πριν την ολοκλήρωση αυτών των λειτουργιών και επιπλέον είτε όλες οι λειτουργίες επιτυγχάνουν πλήρως είτε όλες ματαιώνονται πλήρως (στην τελευταία περίπτωση, οι καταστάσεις των αλληλεπιδρώντων πρακτόρων επαναφέρονται).

Παρατηρήστε ότι η υπόθεση ότι η εσωτερική συνάρτηση μεταβάσεων $\delta$ εφαρμόζεται μόνο όταν η σημαία εργασίας έχει την τιμή 1 είναι ασθενής. Στην πραγματικότητα, ένας ισοδύναμος τρόπος μοντελοποίησης είναι να υποθέσουμε ότι η $\delta$ είναι της μορφής $\delta : Q \times \Gamma^4 \times \{0, 1\} \to Q \times \Gamma^4 \times \{L, R, S\}^4 \times \{0, 1\}$, ότι εφαρμόζεται πάντα και ότι για κάθε $q \in Q$ και $a \in \Gamma^4$ ικανοποιείται η $\delta(q, a, 0) = (q, a, S^4, 0)$, όπου το $S$ εκφράζει ότι η αντίστοιχη κεφαλή μένει στη θέση της (δεν κινείται ούτε αριστερά ούτε δεξιά). Το ίδιο ισχύει και για τις υποθέσεις ότι η $\gamma$ δεν εφαρμόζεται εάν τουλάχιστον ένας από τους αλληλεπιδρώντες πράκτορες εργάζεται εσωτερικά και ότι οι σημαίες εργασίας τίθενται στην τιμή 1 όταν κάποια αλληλεπίδραση ολοκληρωθεί· είναι ισοδύναμες με μία επεκταθείσα $\gamma$ της μορφής $\gamma : Q^2 \times \{0,1\}^2 \to Q^2 \times \{0,1\}^2$, που εφαρμόζεται σε κάθε αλληλεπίδραση και για την οποία ισχύει ότι $\gamma(q_1, q_2, f_1, f_2) = (q_1, q_2, f_1, f_2)$ εάν $f_1 = 1$ ή $f_2 = 1$ και $\gamma(q_1, q_2, f_1, f_2) = (\gamma_1(q_1, q_2), \gamma_2(q_1, q_2), 1, 1)$ εάν $f_1 = f_2 = 0$, για κάθε $q_1, q_2 \in Q$ και θα μπορούσαμε επίσης να επεκτείνουμε περαιτέρω τις $\delta$ και $\gamma$ ούτως ώστε να χειρίζονται την ανταλλαγή μηνυμάτων, αλλά για λόγους απλότητας αποφασίσαμε να αφήσουμε τέτοιες λεπτομέρειες εκτός μοντέλου.

Αφού κάθε πράκτορας είναι μία TM, χρησιμοποιούμε την έννοια της φάσης για να εκφράσουμε την ‘‘εσωτερική του κατάσταση’’. Μία *φάση πράκτορα* (ή *εσωτερική φάση*) είναι μία πλειάδα $(q, l_w, r_w, l_o, r_o, l_{im}, r_{im}, l_{om}, r_{om}, f)$, όπου $q \in Q$, $l_i, r_i \in \Gamma^*$ και $f \in \{0,1\}$. $q$ είναι η κατάσταση της μονάδας ελέγχου, $l_w$ $(l_o, l_{im}, l_{om})$ είναι η συμβολοσειρά της ταινίας εργασίας (εξόδου, εισερχομένων μηνυμάτων, εξερχομένων μηνυμάτων) αριστερά της κεφαλής (συμπεριλαμβανομένου του συμβόλου κάτω απ’ την κεφαλή), $r_w$ $(r_o, r_{im}, r_{om})$ είναι η συμβολοσειρά της ταινίας εργασίας (εξόδου, εισερχομένων μηνυμάτων, εξερχομένων μηνυμάτων) δεξιά της κεφαλής (αποκλείοντας άπειρες ακολουθίες κενών κελιών) και $f$ είναι η σημαία εργασίας που δείχνει εάν ένας πράκτορας είναι έτοιμος να αλληλεπιδράσει ($f = 0$) ή εκτελεί εσωτερικό υπολογισμό ($f = 1$). Έστω $\mathcal{B}$ το σύνολο όλων των φάσεων πρακτόρων. Δοθέντων δύο φάσεων πρακτόρων $A, A' \in \mathcal{B}$, λέμε ότι η $A$ παράγει την $A'$ εάν η $A'$ προκύπτει από την $A$ μέσω μίας μόνο εφαρμογής της $\delta$.

Όμοια με το μοντέλο ΠΠΔ, μία φάση πληθυσμού είναι μία απεικόνιση $C : V \to \mathcal{B}$ που καθορίζει τη φάση πράκτορα για κάθε πράκτορα στον πληθυσμό. Έστω $C$ και $C'$ φάσεις πληθυσμού και έστω $u \in V$. Λέμε ότι η $C$ παράγει τη $C'$ μέσω της *μετάβασης του πράκτορα* $u$ και συμβολίζουμε ως $C \xrightarrow{u} C'$, εάν η $C(u)$ παράγει τη $C'(u)$ και $C'(w) = C(w)$, $\forall w \in V - \{u\}$.

Συμβολίζουμε με $q(A)$ τη συνιστώσα κατάστασης της φάσης πράκτορα $A$ και ομοίως για τις άλλες συνιστώσες (π.χ. $l_w(A)$, $r_{im}(A)$, $f(A)$ κ.ο.κ.). Έστω $s_{tp}(A) = l_{tp}(A)r_{tp}(A)$, δηλαδή παίρνουμε με συναρμογή όλα τα περιεχόμενα της ταινίας $tp \in \{w, o, im, om\}$. Δοθείσης μίας συμβολοσειράς $s$ και $1 \leq i, j \leq |s|$ συμβολίζουμε με $s[\ldots i]$ το πρόθεμά της $s_1 s_2 \ldots s_i$ και με $s[j \ldots]$ το επίθεμά της $s_j s_{j+1} \ldots s_{|s|}$. Εάν $i, j > |s|$ τότε $s[\ldots i] = s\sqcup^{i-|s|}$ (δηλαδή $i - |s|$ κενά σύμβολα προστείθενται στο τέλος της $s$) και $s[j \ldots] = \varepsilon$. Για κάθε εξωτερική μετάβαση $\gamma(q_1, q_2) = (q'_1, q'_2)$ ορίζουμε τις $\gamma_1(q_1, q_2) = q'_1$ και $\gamma_2(q_1, q_2) = q'_2$. Δοθέντων δύο φάσεων πληθυσμού $C$ και $C'$, λέμε ότι η $C$ παράγει τη $C'$ μέσω της συνάντησης $e = (u, \upsilon) \in E$ και συμβολίζουμε και πάλι ως $C \xrightarrow{e} C'$, εάν ισχύει μία απ' τις ακόλουθες δύο περιπτώσεις:

Περίπτωση 1 (μόνο γι' αυτή την περίπτωση, ορίζουμε $C^u \equiv C(u)$ ούτως ώστε να αποφύγουμε τον υπερβολικό αριθμό παρενθέσεων):

- $f(C(u)) = f(C(\upsilon)) = 0$, που εγγυάται ότι τόσο ο $u$ όσο και ο $\upsilon$ είναι έτοιμοι για αλληλεπίδραση κατά τη φάση πληθυσμού $C$.
- $C'(u) = (\gamma_1(q(C^u), q(C^\upsilon)), l_w(C^u), r_w(C^u), l_o(C^u), r_o(C^u), s_{om}(C^\upsilon)[\ldots |l_{im}(C^u)|],$
  $s_{om}(C^\upsilon)[|l_{im}(C^u)| + 1 \ldots], l_{om}(C^u), r_{om}(C^u), 1),$
- $C'(\upsilon) = (\gamma_2(q(C^u), q(C^\upsilon)), l_w(C^\upsilon), r_w(C^\upsilon), l_o(C^\upsilon), r_o(C^\upsilon), s_{om}(C^u)[\ldots |l_{im}(C^\upsilon)|],$
  $s_{om}(C^u)[|l_{im}(C^\upsilon)| + 1 \ldots], l_{om}(C^\upsilon), r_{om}(C^\upsilon), 1)$ και
- $C'(w) = C(w)$, $\forall w \in V - \{u, \upsilon\}$.

Περίπτωση 2:

- $f(C(u)) = 1$ ή $f(C(\upsilon)) = 1$, που σημαίνει ότι τουλάχιστον ένας εκ των $u$ και $\upsilon$ εργάζεται εσωτερικά κατά τη φάση πληθυσμού $C$ και

- $C'(w) = C(w)$, $\forall w \in V$. Στην περίπτωση αυτή δε λαμβάνει χώρα καμία αποτελεσματική αλληλεπίδραση, επομένως η φάση πληθυσμού παραμένει αμετάβλητη.

Γενικά, λέμε ότι η $C$ παράγει τη $C'$ και γράφουμε $C \to C'$ εάν $C \xrightarrow{e} C'$ για κάποια $e \in E$ (μέσω συνάντησης) ή $C \xrightarrow{u} C'$ για κάποιον $u \in V$ (μέσω μετάβασης πράκτορα) ή και τα δύο. Οι ορισμοί της προσβασιμότητας, της εκτέλεσης, της δικαιοσύνης και του υπολογισμού είναι ίδιοι με πριν.

Υποθέτουμε ότι το αλφάβητο εισόδου $X$, το αλφάβητο ταινίας $\Gamma$ και το σύνολο καταστάσεων $Q$ είναι όλα σύνολα των οποίων ο πληθάριθμος είναι σταθερός και ανεξάρτητος του μεγέθους του πληθυσμού. Επομένως, οι περιγραφές των πρωτοκόλλων είναι και εδώ ανεξατητες του μεγέθους του πληθυσμού και το μοντέλο ΠΜ *διατηρεί την ομοιομορφία*. Επιπλέον, τα πρωτόκολλα ΠΜ είναι αρχικά *ανώνυμα* (ωστόσο υπάρχει άφθονος χώρος στις τανίες τους για να δημιουργηθούν εκεί μοναδικοί προσδιοριστές).

Οι ορισμοί που αφορούν στις αναθέσεις εισόδου [1] και στον σταθερό υπολογισμό παραμένουν ίδιοι με τα προηγούμενα κεφάλαια. Σε ό, τι ακολουθεί υποθέτουμε ότι το γράφημα επικοινωνίας είναι πλήρες.

**Ορισμός 12.** *Έστω $PMSPACE(f(n))$ η κλάση των κατηγορημάτων που είναι σταθερά υπολογίσιμα από κάποιο πρωτόκολλο ΠΜ που χρησιμοποιεί $\mathcal{O}(f(n))$ χώρο σε κάθε πράκτορα (και σε κάθε ταινία του).*

**Παρατήρηση 6.** *Όλοι οι πράκτορες είναι ταυτόσημοι και αρχικά δεν έχουν μοναδικούς προσδιοριστές, επομένως τα σταθερά υπολογίσιμα κατηγορήματα απ' το μοντέλο ΠΜ πρέπει να είναι συμμετρικά.*

Στην πραγματικότητα, παρότι παρέχουμε γενικούς ορισμούς, ενδιαφερόμαστε κυρίως για την κλάση $PLM \equiv PMSPACE(\log n)$ και καλούμε ένα πρωτόκολλο *ΠΑΛΟΜΑ*

[1] Η υπόθεση ότι και εδώ η είσοδος σε κάθε πράκτορα είναι ένα μόνο σύμβολο έγινε χάριν ευκολίας και χ.β.τ.γ. Ωστόσο, οι ορισμοί μας μπορούν εύκολα να τροποποιηθούν ούτως ώστε να επιτρέπεται στους πράκτορες να λαμβάνουν ως είσοδο ολόκληρες συμβολοσειρές.

εάν χρησιμοποιεί πάντα χώρο $\mathcal{O}(\log n)$. Το βασικό μας αποτέλεσμα σε αυτό το κεφάλαιο είναι ο ακόλουθος ακριβής χαρακτηρισμός για την $PLM$: η $PLM$ είναι ίση με την $SNSPACE(n \log n)$. Στην πραγματικότητα, η απόδειξη που δίνουμε γενικεύει εύκολα παρέχοντας έτσι έναν ακριβή χαρακτηρισμό για την $PMSPACE(f(n))$, όταν $f(n) = \Omega(\log n)$: η $PMSPACE(f(n))$ είναι ίση με την $SNSPACE(nf(n))$ (ο τελευταίος χαρακτηρισμός παρουσιάζεται στο επόμενο κεφάλαιο).

### 4.2.1 Δύο Παραδείγματα και ένας Πρώτος Εγκλεισμός για την $PLM$

#### Πολλαπλασιασμός Μεταβλητών

Παρουσιάζουμε τώρα ένα πρωτόκολλο ΠΜ που υπολογίζει σταθερά το κατηγόρημα $(N_c = N_a \cdot N_b)$ χρησιμοποιώντας $\mathcal{O}(\log n)$ χώρο (στο πλήρες γράφημα επικοινωνίας $n$ κόμβων), δηλαδή όλοι οι πράκτορες τελικά διαγιγνώσκουν εάν το πλήθος των $c$ στην ανάθεση εισόδου είναι το γινόμενο του πλήθους των $a$ και του πλήθους των $b$. Δίνουμε μία υψηλού επιπέδου περιγραφή του πρωτοκόλλου.

Αρχικά, όλοι οι πράκτορες έχουν γραμμένο στο πρώτο κελί των ταινιών εισόδου τους ένα από τα σύμβολα $a$, $b$ και $c$ (σύφωνα με την τιμή που αισθάνθηκε ο καθένας). Δηλαδή, το αλφάβητο εισόδου είναι $X = \{a, b, c\}$. Κάθε πράκτορας που λαμβάνει την είσοδο $a$ πηγαίνει στην κατάσταση $a$ και γίνεται έτοιμος για αλληλεπίδραση (θέτει τη σημαία εργασίας στην τιμή 1). Οι πράκτορες στις καταστάσεις $a$ και $b$ δεν κάνουν τίποτα όταν αλληλεπίδρουν με πράκτορες στις καταστάσεις $a$ και $b$. Ένας πράκτορας στη $c$ αρχικά δημιουργεί στην ταινία εργασίας τρεις δυαδικούς μετρητές, τον $a$-μετρητή που μετράει το πλήθος των $a$, τον $b$-μετρητή και τον $c$-μετρητή, αρχικοποιεί τους $a$ και $b$ μετρητές στην τιμή 0, τον $c$-μετρητή στην τιμή 1 και γίνεται έτοιμος. Όταν ένας πράκτορας στην κατάσταση $a$ αλληλεπιδρά με έναν πράκτορα στην $c$, ο $a$ γίνεται $\bar{a}$ υποδηλώνοντας ότι ο πράκτορας κοιμάται και ο $c$ κάνει τα ακόλουθα (στην πραγματικότητα, υποθέτουμε ότι ο $c$ πηγαίνει σε μία ειδική κατάσταση $c_a$ κατά την οποία θυμάται ότι έχει δει ένα $a$ και ότι όλα τα ακόλουθα εκτελούνται εσωτερικά, μετά την αλληλεπίδραση· τελικά, ο πράκτορας επαναφέρει την κατάσταση του στη $c$ και γίνεται και πάλι έτοιμος για αλληλεπίδραση): αυξάνει τον $a$-μετρητή κατά ένα (στο δυαδικό), πολλαπλασιάζει τους $a$ και $b$ μετρητές, το οποίο μπορεί να γίνει στο δυαδικό σε λογαριθμικό χώρο (ο δυαδικός πολλαπλασιασμός ανήκει στην $LOGSPACE$), συγκρίνει το αποτέλεσμα με τον $c$-μετρητή, αντιγράφει το αποτέλεσμα της σύγκρισης στην ταινία εξόδου, δηλαδή, 1 εάν ήταν ίσοι και 0 διαφορετικά και τέλος αντιγράφει το αποτέλεσμα της σύγκρισης και τους τρεις μετρητές στην ταινία εξερχομένων μηνυμάτων και γίνεται έτοιμος για αλληλεπίδραση. Παρόμοια πράγματα συμβαίνουν όταν ένας $b$ συναντάει έναν $c$ (ανταλλάξτε τους ρόλους των $a$ και $b$ στην παραπάνω συζήτηση). Όταν ένα $c$ συναντάει ένα $c$, ο αποκρινόμενος γίνεται $\bar{c}$ και αντιγράφει στην ταινία εξόδου του το δυφίο εξόδου που περιέχεται στο μήνυμα του μυητή. Ο μυητής παραμένει στην $c$, προσθέτει τον $a$-μετρητή που περιέχεται στο μήνυμα του αποκρινόμενου στον δικό του $a$-μετρητή, τους $b$ και $c$ μετρητές του μηνύματος στους $b$ και $c$ μετρητές του, αντίστοιχα, πολλαπλασιάζει και πάλι τους ανανεωμένους $a$ και $b$ μετρητές, συγκρίνει το αποτέλεσμα με τον ανανεωμένο του $c$-μετρητή, αποθηκεύει το αποτέλεσμα της σύγκρισης στις ταινίες εξόδου και εξερχομένων μηνυμάτων, αντιγράφει τους μετρητές στην ταινία εξερχομένων μηνυμάτων και γίνεται και πάλι έτοιμος. Όταν ένας $\bar{a}$, $\bar{b}$ ή $\bar{c}$ συναντήσει έναν $c$ απλώς αντιγράφει στην ταινία εξόδου του το δυφίο εξόδου που περιλαμβάνεται στο εξερχόμενο μήνυμα του $c$ και γίνεται και πάλι έτοιμος (π.χ. ο $\bar{a}$ παραμένει $\bar{a}$), ενώ ο $c$ δεν κάνει τίποτα.

Παρατηρήστε ότι το πλήθος των $c$ είναι το πολύ $n$ πράγμα που σημαίνει ότι ο $c$-μετρητής θα έχει μήκος το πολύ $\lceil \log n \rceil$ δυφία και το ίδιο ισχύει για τους $a$ και $b$ μετρητές, επομένως $\mathcal{O}(\log n)$ απαιτείται σε κάθε ταινία.

**Θεώρημα 23.** *Το παραπάνω πρωτόκολλο ΠΜ υπολογίζει σταθερά το κατηγόρημα* $(N_c = N_a \cdot N_b)$ *χρησιμοποιώντας χώρο* $\mathcal{O}(\log n)$.

*Απόδειξη.* Δοθείσης μίας δίκαιης εκτέλεσης, τελικά μόνο ένας πράκτορας θα παραμείνει στην κατάσταση $c$, ο $a$-μετρητής του θα περιέχει το συνολικό πλήθος των $a$, ο $b$-μετρητής του το συνολικό πλήθος των $b$ και ο $c$-μετρητής του το συνολικό πλήθος των $c$. Εκτελώντας τον πολλαπλασιασμό των $a$ και $b$ μετρητών και συγκρίνοντας το αποτέλεσμα με τον $c$-μετρητή θα αποφασίσει σωστά εάν το $N_c = N_a \cdot N_b$ ισχύει και θα αποθηκεύσει το σωστό αποτέλεσμα (0 ή 1) στις ταινίες εξόδου και εξερχομένων μηνυμάτων. Στο σημείο αυτό όλοι οι υπόλοιποι πράκτορες θα βρίσκονται σε μία από τις καταστάσεις $\bar{a}$, $\bar{b}$, και $\bar{c}$. Όλοι αυτοί, και πάλι λόγω δικαιοσύνης, θα συναντήσουν τον μοναδικό πράκτορα που βρίσκεται στην κατάσταση $c$ και θα αντιγράψουν το δυφίο εξόδου του που είναι και το σωστό (το οποίο φυσικά θα βρουν στο μήνυμα που λαμβάνουν απ' τον $c$) στις ταινίες εξόδου τους. Επομένως, τελικά όλοι οι πράκτορες θα δώσουν ως έξοδο την σωστή τιμή για το κατηγόρημα, έχοντας χρησιμοποιήσει $\mathcal{O}(\log n)$ μνήμη. □

**Πόρισμα 5.** *Η SEM είναι γνήσιο υποσύνολο της PLM.*

*Απόδειξη.* Τα πρωτόκολλα ΠΑΛΟΜΑ προσομοιώνουν τα ΠΠ και $(N_c = N_a \cdot N_b) \in PLM$, το οποίο δεν είναι ημιγραμμικό. □

### Δύναμη του 2

Εδώ παρουσιάζουμε ένα πρωτόκολλο ΠΜ που, χρησιμοποιώντας και αυτό $\mathcal{O}(\log n)$ χώρο, υπολογίζει σταθερά το κατηγόρημα $(N_1 = 2^t)$, όπου $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, δηλαδή όλοι οι πράκτορες αποφασίζουν τελικά εάν το πλήθος των 1 στην ανάθεση εισόδου είναι κάποια δύναμη του 2.

Το αλφάβητο εισόδου είναι $Q = \{0, 1\}$. Όσοι πράκτορες λαμβάνουν την είσοδο 1 δημιουργούν ένα δυαδικό 1-μετρητή στην ταινία εργασίας και τον αρχικοποιούν στην τιμή 1. Επιπρόσθετα, δημιουργούν ένα τμήμα $next\_pow\_of2$ και το θέτουν στην τιμή 2. Τέλος, γράφουν 1 (το οποίο ερμηνεύεται ως ''αληθές'') στην ταινία εξόδου τους και αντιγράφουν τον 1-μετρητή και το εξερχόμενο δυφίο στην ταινία εξερχομένων μηνυμάτων πρωτού περάσουν στην κατάσταση 1 και γίνουν έτοιμοι. Οι πράκτορες στην κατάσταση 0 δεν κάνουν τίποτα όταν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους. Όταν ένας πράκτορας στην 0 αλληλεπιδράσει με έναν στην 1, τότε ο 0 απλώς αντιγράφει το δυφίο εξόδου του 1. Όταν δύο πράκτορες στην 1 αλληλεπιδράσουν, τότε λαμβάνουν χώρα τα ακόλουθα: ο μυητής θέτει τον 1-μετρητή του στο άθροισμα του 1-μετρητή του αποκρινόμενου και του δικού του 1-μετρητή και συγκρίνει την ανανεωμένη τιμή με το $next\_pow\_of2$. Εάν είναι μικρότερη απ' το $next\_pow\_of2$ τότε γράφει 0 στην ταινία εξόδου. Εάν είναι ίση με $next\_pow\_of2$ θέτει το $next\_pow\_of2$ σε $2 \cdot next\_pow\_of2$ και το δυφίο εξόδου στην τιμή 1. Εάν είναι μεγαλύτερη από $next\_pow\_of2$, τότε αρχίζει να διπλασιάζει το $next\_pow\_of2$ έως ότου ικανοποιηθεί η 1-μετρητής $\geq next\_pow\_of2$. Εάν ικανοποιηθεί με ισότητα, τότε διπλασιάζει το $next\_pow\_of2$ ακόμα μία φορά και γράφει 1 στην ταινία εξόδου. Διαφορετικά, απλώς γράφει 0 στην ταινία εξόδου. Μία εναλλακτική υλοποίηση θα ήταν να αποστέλουμε τα τμήματα $next\_pow\_of2$ μέσω μηνυμάτων και να κάνουμε τον μυητή να θέτει το $next\_pow\_of2$ στο μέγιστο μεταξύ του δικού του $next\_pow\_of2$ και του αποκρινόμενου. Στην περίπτωση αυτή θα χρειαζόταν το πολύ ένας διπλασιασμός. Τέλος, και στις δύο υλοποιήσεις, ο μυητής αντιγράφει το δυφίο εξόδου και τον 1-μετρητή στην ταινία εξερχομένων μηνυμάτων (στη δεύτερη υλοποίηση θα αντέγραφε επίσης και το $next\_pow\_of2$), παραμένει στην κατάσταση 1 και γίνεται έτοιμος. Ο αποκρινόμενος απλώς πηγαίνει στην κατάσταση $\bar{1}$ και γίνεται έτοιμος. Ένας πράκτορας στην $\bar{1}$ δεν κάνει τίποτα όταν αλληλεπιδρά με έναν πράκτορα στην 0 και αντιστρόφως. Όταν ένας πράκτορας στην $\bar{1}$ αλληλεπιδρά με έναν πράκτορα στην 1, τότε ο $\bar{1}$ απλώς αντιγράφει το δυφίο εξόδου του 1.

Παρατηρήστε ότι το $next\_pow\_of2$ μπορεί να γίνει το πολύ δύο φορές το πλήθος των 1 στην ανάθεση εισόδου και το τελευταίο είναι το πολύ $n$. Επομένως, απαιτεί το πολύ $\lceil \log 2n \rceil$ δυφία μνήμης. Σε κάθε περίπτωση, μπορούμε να καθυστερήσουμε τον πολλαπλασιασμό μέχρι να εμφανιστεί ακόμα ένα 1 οπότε και χρειαζόμαστε $\lceil \log n \rceil$ δυφία για την αποθήκευση του $next\_pow\_of2$ (δε θα πραγματοποιηθεί ο τελευταίος περιττός πολλαπλασιασμός).

## 4.3 Αναθέτοντας Μοναδικούς Προσδιοριστές με Επανεκκίνηση του Υπολογισμού

Στην ενότητα αυτή, πρώτα αποδεικνύουμε ότι τα πρωτόκολλα ΠΜ μπορούν να υποθέτουν την ύπαρξη μοναδικών διαδοχικών προσδιοριστών και γνώση του μεγέθους του πληθυσμού με $\mathcal{O}(\log n)$ χωρικό κόστος (Θεώρημα 24). Συγκεκριμένα, παρουσιάζουμε ένα πρωτόκολλο ΠΜ που αναθέτει μοναδικούς διαδοχικούς προσδιοριστές στους πράκτορες και τους πληροφορεί για το μέγεθος του πληθυσμού χρησιμοποιώντας μόνο $\mathcal{O}(\log n)$ μνήμη, χωρίς να υποθέτει οποιαδήποτε αρχική γνώση για κανένα από αυτά. Δείχνουμε ότι το πρωτόκολλο αυτό μπορεί να προσομοιώσει οποιοδήποτε πρωτόκολλο ΠΜ που υποθέτει την ύπαρξη αυτών των προσδιοριστών και που γνωρίζει το μέγεθος του πληθυσμού. Στο τέλος της ενότητας, εκμεταλλευόμαστε αυτό το αποτέλεσμα για να δείξουμε ότι $SSPACE(n \log n) \subseteq PLM$.

**Ορισμός 13.** *Έστω ΠΜΠ (το επιπλέον 'Π' εκφράζει τους "Προσδιοριστές") η επέκταση του μοντέλου ΠΜ στο οποίο οι πράκτορες έχουν επιπλέον τους μοναδικούς προσδιοριστές* $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ *και στο οποίο κάθε πράκτορας γνωρίζει το μέγεθος του πληθυσμού (αυτές είναι πληροφορίες μόνο για ανάγνωση που αποθηκεύονται σε μία ξεχωριστή ταινία ανάγνωσης).*

**Ορισμός 14.** *Έστω* $IPMSPACE(f(n))$ *η κλάση των κατηγορημάτων που είναι σταθερά υπολογίσιμα από κάποιο πρωτόκολλο ΠΜΠ που χρησιμοποιεί* $\mathcal{O}(f(n))$ *χώρο σε κάθε πράκτορα (και σε όλες τις ταινίες τους, χωρίς να λαμβάνεται υπ' όψιν ο χώρος της ξεχωριστής ταινίας ανάγνωσης) και έστω* $SIPMSPACE(f(n))$ *η συμμετρική υ-*

*ποκλάση της. Όμοια με την* $PLM$ *ορίζουμε τις* $IPLM \equiv IPMSPACE(\log n)$ *και* $SIPLM \equiv SIPMSPACE(\log n)$.

Θεωρήστε οποιοδήποτε $p \in SIPLM$. Έστω $\mathcal{A}$ το πρωτόκολλο ΠΜΠ που το υπολογίζει σταθερά σε χώρο $\mathcal{O}(\log n)$. Θα παρουσιάσουμε ένα πρωτόκολλο ΠΜ $\mathcal{I}$ που περιέχει το $\mathcal{A}$ σαν υπορουτίνα και το οποίο υπολογίζει σταθερά το $p$ χρησιμοποιώντας επίσης χώρο $\mathcal{O}(\log n)$. Το $\mathcal{I}$ εκτελείται πάντα και η δουλειά του είναι να αναθέσει μοναδικούς προσδιοριστές στους πράκτορες, να τους πληροφορήσει για το μέγεθος του πληθυσμού και να ελέγχει την εκτέλεση του $\mathcal{A}$ (π.χ. την επανεκκινεί εάν χρειάζεται). Το $\mathcal{A}$, όταν το $\mathcal{I}$ το αφήνει να εκτελεστεί, απλώς διαβάζει τους μοναδικούς προσδιοριστές και το μέγεθος του πληθυσμού που παρέχεται από το $\mathcal{I}$ και εκτελείται φυσιολογικά. Πρώτα παρουσιάζουμε το $\mathcal{I}$ και εν συνεχεία αποδεικνύουμε ότι τελικά αναθέτει μοναδικούς προδιοριστές, ενημερώνει τους πράκτορες για το μέγεθος του πληθυσμού και όταν αυτή η διαδικασία ολοκληρωθεί επιτυχώς επανεκκινεί την εκτέλεση του $\mathcal{A}$ σε όλους τους πράκτορες χωρίς να επιτρέπει στους πράκτορες που δεν έχουν επανεκκινηθεί να επικοινωνούν με αυτούς που έχουν επανεκκινηθεί. Επομένως, κάποια στιγμή, το $\mathcal{A}$ θα αρχίσει να εκτελείται διαβάζοντας τους σωστούς μοναδικούς προσδιοριστές και το σωστό μέγεθος του πληθυσμού (τα οποία παρέχονται από το $\mathcal{I}$), θα εκτελεστεί σωστά και θα υπολογίσει σταθερά το $p$.

Αρχίζουμε περιγράφοντας τις μεταβλητές του $\mathcal{I}$. Η $id$ είναι η μεταβλητή που αποθηκεύει τον μοναδικό προσδιοριστή του πράκτορα (από την οποία το $\mathcal{A}$ διαβάζει τους προσδιοριστές των πρακτόρων), η $sid$ είναι η μεταβλητή που αποθηκεύει τον προσδιοριστή που ο πράκτορας γράφει στην ταινία εξερχομένων μηνυμάτων ούτως ώστε να τον αποστείλει και η $rid$ η μεταβλητή που αποθηκεύει τον προσδιοριστή που ο πράκτορας λαμβάνει μέσω αλληλεπίδρασης. Θυμηθείτε τη σύμβαση του μοντέλου που λέει ότι όλες οι μεταβλητές που χρησιμοποιούνται για την αποστολή δεδομένων, όπως η $sid$, διατηρούν την τιμή τους σε μελλοντικές αλληλεπιδράσεις εκτός και αν τροποποιηθούν από τον πράκτορα. Αρχικά, $id = sid = 0$ για όλους τους πράκτορες. Όλοι οι πράκτορες έχουν μία μεταβλητή εφεδρείας εισόδου $binput$ την οποία θέτουν αρχικά στο σύμβολο εισόδου τους και την κάνουν μόνο για ανάγνωση. Επομένως, κάθε πράκτορας έχει πάντα διαθέσιμη την είσοδό του μέσω της $binput$ ακόμα και αν ο υπολογισμός έχει προχωρήσει. Η $working$ αναπαριστά το τμήμα της ταινίας εργασίας που το $\mathcal{A}$ χρησιμοποιεί για τον υπολογισμό του και η $output$ αναπαριστά τα περιεχόμενα της ταινίας εξόδου. Η $initiator$ είναι μία δυαδική σημαία που μετά από κάθε αλληλεπίδραση γίνεται αληθής εάν ο πράκτορας ήταν ο μυητής της αλληλεπίδρασης και ψευδής διαφορετικά (αυτό υλοποιείται εύκολα με χρήση της εξωτερικής συνάρτησης μεταβάσεων). Η $ps$ είναι η μεταβλητή που αποθηκεύει το μέγεθος του πληθυσμού, η $sps$ χρησιμοποιείται για την τοποθέτησή του σε εξερχόμενο μήνυμα και η $rps$ αναπαριστά το μέγεθος του πληθυσμού που περιέχεται σε εισερχόμενο μήνυμα. Αρχικά, $ps = sps = 0$.

Περιγράφουμε τώρα τη λειτουργικότητα του $\mathcal{I}$. Όποτε αλληλεπιδρά ένα ζεύγος πρακτόρων οι οποίοι διαθέτουν τον ίδιο αναγνωριστή, ο μυητής αυξάνει τον αναγνωριστή του κατά ένα και ανανεώνουν και οι δύο το μέγεθος του πληθυσμού που γνωρίζουν στον μεγαλύτερο προσδιοριστή συν ένα. Όποτε δύο πράκτορες με διαφορετικούς προσδιοριστές και μεγέθη πληθυσμού αλληλεπιδρούν, ανανεώνουν τα μεγέθη πληθυσμού στο μεγαλύτερο. Επομένως, το σωστό μέγεθος (μεγαλύτερος προσδιοριστής συν ένα) διαδίδεται σε όλους τους πράκτορες. Και οι δύο αλληλεπιδράσεις που περιγράψαμε επανεκκινούν τους πράκτορες που συμμετέχουν στην αλληλεπίδραση (επαναφέρουν την είσοδο και διαγράφουν όλα τα δεδομένα που παρήχθησαν απ' την υπορουτίνα $\mathcal{A}$, χωρίς να τροποποιούν τους προσδιοριστές και τα μεγέθη πληθυσμού). Το $\mathcal{A}$ εκτελείται (ως υπορουτίνα) όταν αλληλεπιδρούν δύο πράκτορες με διαφορετικούς προσδιοριστές και ίδια μεγέθη πληθυσμού και χρησιμοποιεί τα δεδομένα που παρέχονται από το $\mathcal{I}$.

**Πρωτόκολλο 3** $\mathcal{I}$

**εάν** $rid == id$ **τότε** // δύο πράκτορες με ίδιους προσδιοριστές αλληλεπιδρούν
  **εάν** $initiator == 1$ **τότε** // ο μυητής
    $id \leftarrow id + 1$, $sid \leftarrow id$ // αυξάνει τον προσδιοριστή του κατά ένα και τον γράφει στην ταινία εξερχομένων μηνυμάτων
    $ps \leftarrow id + 1$, $sps \leftarrow ps$ // θέτει το μέγεθος του πληθυσμού στον ανανεωμένο προσδιοριστή συν ένα
  **αλλιώς** // ο αποκρινόμενος
    $ps \leftarrow id + 2$, $sps \leftarrow ps$
  **τέλος εάν**
  // και οι δύο καθαρίζουν το τμήμα εργασίας και αντιγράφουν σε αυτό το σύμβολο εισόδου τους
  // καθαρίζουν επίσης την ταινία εξόδου
  $working \leftarrow binput$, $output \leftarrow \emptyset$
**αλλιώς** // δύο πράκτορες με διαφορετικούς προσδιοριστές αλληλεπιδρούν
  **εάν** $rps > ps$ **τότε** // αυτός που ξέρει ένα ξεπερασμένο μέγεθος πληθυσμού
    $working \leftarrow binput$, $output \leftarrow \emptyset$ // επανεκκινείται
    $ps \leftarrow rps$, $sps \leftarrow ps$ // και ανανεώνει το μέγεθος πληθυσμού του στην μεγαλύτερη τιμή
  **αλλιώς εάν** $rps == ps$ **τότε** // ξέρουν το ίδιο μέγεθος πληθυσμού
    // επομένως επανεκκινούνται και οι δύο και μπορούν πλέον να εκτελέσουν το $\mathcal{A}$
    **εκτέλεσε** το $\mathcal{A}$ για 1 βήμα
  **τέλος εάν**
**τέλος εάν**

**Λήμμα 8.** *(i) Το $\mathcal{I}$ αναθέτει τους προσδιοριστές $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ σε πεπερασμένο αριθ-*

*μό βημάτων. (ii) Η διαδικασία ανάθεσης προσδιοριστών τελειώνει με μία αλληλεπίδραση $(u, v)$ δύο πρακτόρων $u$ και $v$ που και οι δύο έχουν τον προσδιοριστή $n-2$. (iii) Αυτή είναι η τελευταία αλληλεπίδραση που τροποποιεί τον προσδιοριστή κάποιου πράκτορα. (iv) Όταν λάβει χώρα αυτή η αλληλεπίδραση, ο $u$ και ο $v$ γνωρίζουν το $n$ και όλοι οι υπόλοιποι πράκτορες γνωρίζουν ένα μέγεθος πληθυσμού που είναι αυστηρά μικρότερο απ' το $n$.*

*Απόδειξη.* (i) Αρχικά όλοι οι πράκτορες έχουν τον προσδιοριστή 0. Ο προσδιοριστής κάθε πράκτορα μπορεί μόνο να αυξηθεί. Επιπλέον, ένας προσδιοριστής που έχει εμφανιστεί στον πληθυσμό δε μπορεί ποτέ να εξαλειφθεί πλήρως (μπορεί μόνο να αυξηθεί όταν σίγουρα υπάρχει και σε άλλο πράκτορα). Όσο ο προσδιοριστής $n-1$ δεν έχει εμφανιστεί, από την αρχή του περιστερώνα, θα υπάρχουν τουλάχιστον δύο πράκτορες με τον ίδιο προσδιοριστή. Επομένως, τελικά λόγω της δικαιοσύνης, δύο τέτοιοι πράκτορες θα αλληλεπιδράσουν και ένας απ' αυτούς θα αυξήσει τον προσδιοριστή του κατά ένα. Ξεκάθαρα, η παραπάνω διαδικασία θα πρέπει να ολοκληρωθεί σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων με ένα πράκτορα να έχει τον προσδιοριστή $n-1$. Όταν αυτό συμβεί, στους πράκτορες έχουν ανατεθεί οι μοναδικοί προσδιοριστές $\{0, 1, \ldots, n-1\}$. Εάν όχι, τότε τουλάχιστον ένας προσδιοριστής $i < n-1$ θα λείπει απ' τον πληθυσμό. Όμως ο $i$ θα έπρεπε να έχει εμφανιστεί, διαφορετικά δε θα μπορούσε να έχει δημιουργηθεί ο $n-1$. Αυτό όμως είναι άτοπο, διότι απ' τη στιγμή που εμφανίζεται ένας προσδιοριστής δε μπορεί ποτέ να εξαλειφθεί πλήρως.

(ii) Έστω ότι δεν ισχύει. Τότε θα πρέπει να τελειώνει με κάποια αλληλεπίδραση μεταξύ δύο πρακτόρων $u$ και $v$ που και οι δύο έχουν τον ίδιο προσδιοριστή $i < n-2$. Μετά την αλληλεπίδραση, ο $u$ έχει τον προσδιοριστή $i+1$, ο $v$ τον $i$, και γενικά οι πράκτορες έχουν τους μοναδικούς προσδιοριστές $\{0, 1, \ldots, n-1\}$. Αυτό συνεπάγεται ότι ο προσδιοριστής $i+1$ δεν υπήρχε στον πληθυσμό πριν την αλληλεπίδραση. Όμως για να υπάρχει ο $n-1$ θα πρέπει να ισχύει ότι ο $i+1 < n-1$ είχε εμφανιστεί κάποια στιγμή. Όμως τότε δε θα μπορούσε να έχει εξαλειφθεί πλήρως, άρα άτοπο.

(iii) Αμέσως μόλις έχουν ανατεθεί οι μοναδικοί διαδοχικοί προσδιοριστές $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, όλοι οι πράκτορες έχουν διαφορετικούς προσδιοριστές. Οι προσδιοριστές τροποποιούνται μόνο όταν αλληλεπιδρούν πράκτορες με τους ίδιους προσδιοριστές. Επομένως, κανένας πράκτορας δε θα τροποποιήσει τον προσδιοριστή του σε κανένα απ' τα μετέπειτα βήματα.

(iv) Ο $u$ και ο $v$ προφανώς γνωρίζουν το $n$ μετά την αλληλεπίδρασή τους (που τερματίζει τη διαδικασία ανάθεσης προσδιοριστών), επειδή ο $u$, που θέτει $id = n-1$, θέτει την $ps$ στην τιμή $id+1$ και ο $v$ που διατηρεί τον προσδιοριστή του (δηλαδή συνεχίζει να έχει $id = n-2$), θέτει $ps = id+2$. Την ίδια στιγμή, για όλους τους άλλους πράκτορες $w \in V - \{u, v\}$, ισχύει ότι η $ps$ μεταβλητές τους περιέχουν μία τιμή μικρότερη του $n$, επειδή αν δεν ίσχυε αυτό τότε θα έπρεπε να υπάρχει κάποιος πράκτορας διαφορετικός του $u$ με προσδιοριστή $n-1$ το οποίο είναι αδύνατον (λόγω της ορθότητας της διαδικασίας ανάθεσης προσδιοριστών). $\square$

**Λήμμα 9.** *Αφού συμβεί η τελευταία τροποποίηση κάποιου προσδιοριστή (μέσω κάποιας αλληλεπίδρασης $(u, v)$), όλοι οι πράκτορας θα πληροφορηθούν τελικά για το πραγματικό μέγεθος του πληθυσμού και όποτε κάποιος πράκτορας $i$, που γνωρίζει το πραγματικό μέγεθος του πληθυσμού, διαδίδει το μέγεθος του πληθυσμού σε κάποιον πράκτορα $j$, ο $j$ επανεκκινείται και δε μπορεί να επανεκκινηθεί ξανά στο μέλλον.*

*Απόδειξη.* Σύμφωνα με το Πρωτόκολλο 3, αφού λάβει χώρα η τελευταία τροποποίηση προσδιοριστή, όποτε ένας πράκτορας $j$ αλληλεπιδρά με έναν πράκτορα $k$ που γνωρίζει ένα μεγαλύτερο μέγεθος πληθυσμού, ο $j$ ανανεώνει το δικό του μέγεθος πληθυσμού στην τιμή του $k$ και επανεκκινείται, δηλαδή επαναφέρει τα τμήματα εργασίας του $\mathcal{A}$ στο αντίστοιχο σύμβολο εισόδου (εκτελώντας $working \leftarrow binput$) και καθαρίζει την ταινία εξόδου (συμβολίζεται ως $output \leftarrow \emptyset$ στον κώδικα). Με τον τρόπο αυτό το μεγαλύτερο μέγεθος πληθυσμού διαδίδεται σε όλους τους πράκτορες. Αφού πλέον οι μοναδικοί προσδιοριστές δε μπορούν να τροποποιηθούν, δε μπορεί να τροποποιηθεί ούτε το μεγαλύτερο μέγεθος πληθυσμού, αφού αυτό τροποποιείται μόνο μέσω αύξησης προσδιοριστή. Κατά συνέπεια, ένας πράκτορας που γνωρίζει το πραγματικό μέγεθος του πληθυσμού δε μπορεί να επανεκκινηθεί ξανά. Επομένως, όταν ένας πράκτορας $j$, που δε γνωρίζει το πραγματικό μέγεθος του πληθυσμού (άρα, λόγω του Λήμματος 8, γνωρίζει μία αυστηρά μικρότερη τιμή), αλληλεπιδρά με κάποιον πράκτορα $i$ που ξέρει την πραγματική τιμή, τότε ο $j$ πληροφορείται για το πραγματικό μέγεθος πληθυσμού και επανεκκινείται για τελευταία φορά. $\square$

Στο ακόλουθο Λήμμα, καλούμε μία αλληλεπίδραση *αποτελεσματική* εάν το πρωτόκολλο $\mathcal{A}$ εκτελείται σε τουλάχιστον έναν απ' τους συμμετέχοντες πράκτορες. Επιπλέον, καλούμε έναν πράκτορα *τελικής επανεκκίνησης* εάν έχει επανεκκινηθεί για τελευταία φορά.

**Λήμμα 10.** *Αφού έχουν ανατεθεί οι διαδοχικοί μοναδικοί προσδιοριστές* $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, *οι πράκτορες τελικής επανεκκίνησης έχουν αποτελεσματικές αλληλεπιδράσεις μεταξύ τους, ενώ οι αλληλεπιδράσεις τους με τους υπόλοιπους πράκτορες είναι αναποτελεσματικές.*

*Απόδειξη.* Αφού έχουν ανατεθεί οι διαδοχικοί μοναδικοί προσδιοριστές, είναι σαν ο πληθυσμός να είναι διαχωρισμένος σε δύο κλάσεις, την κλάση $FR$ των πρακτόρων τελικής επανεκκίνησης που επιπρόσθετα γνωρίζουν το πραγματικό μέγεθος πληθυσμού και την κλάση $NFR$ των υπολοίπων πρακτόρων. Αρχικά (ακριβώς μόλις ολοκληρωθεί η ανάθεση των προσδιοριστών) έχουμε ότι $FR = \{n-2, n-1\}$ και $NFR = \{0, 1, \ldots, n-3\}$, δηλαδή όλοι οι πράκτορες εκτός των $n-1$ και $n-2$, που ξέρουν το πραγματικό μέγεθος πληθυσμού, δε θεωρούνται ως τελικής επανεκκίνησης. Ένας πράκτορας $i \in NFR$ μετακινείται στην κλάση $FR$ ανν αλληλεπιδράσει με έναν πράκτορα της $FR$. Αυτή η αλληλεπίδραση επανεκκινεί τον $i$ για τελευταία φορά, όπως δείξαμε στο Λήμμα 9, και του κοινοποιεί το πραγματικό μέγεθος πληθυσμού. Επομένως καμία αλληλεπίδραση μεταξύ πρακτόρων διαφορετικών κλάσεων δε μπορεί να είναι αποτελεσματική. Ομοίως, παρατηρώντας το Πρωτόκολλο 3, είναι εύκολο να δει κανείς ότι οι πράκτορες της $FR$ έχουν μεταξύ τους αποτελεσματικές αλληλεπιδράσεις. $\square$

Εύκολα παρατηρεί κανείς ότι το $\mathcal{I}$, πέρα απ' το να καλεί το $\mathcal{A}$, το μόνο που κάνει είναι κάποιες συγκρίσεις και αναθέσεις τιμών σε μεταβλητές, λειτουργίες οι οποίες δε μπορούν να οδηγήσουν σε ατέρμονα βρόχο. Όμως, όσο δεν έχουν ακόμα ανατεθεί οι σωστοί προσδιοριστές στους πράκτορες, κάποιοι αλληλεπιδρώντες πράκτορες μπορεί να διατηρούν μη συμβατά δεδομένα, γεγονός το οποίο μπορεί να οδηγήσει την υπορουτίνα $\mathcal{A}$ σε κάποιο ατέρμονα βρόχο. Αν αυτό ίσχυε, θα καθιστούσε αδύνατη την επανεκκίνηση του αντίστοιχου πράκτορα και πρέπει να βεβαιωθούμε ότι δεν υπάρχει τέτοια περίπτωση.

**Λήμμα 11.** *Κανένας πράκτορας δεν εγκλωβίζεται σε ατέρμονα βρόχο.*

*Απόδειξη.* Εξασφαλίζεται από το γεγονός ότι το $\mathcal{A}$ εκτελείται πάντα για ένα μόνο βήμα. $\square$

**Λήμμα 12.** *Δοθέντος ότι η εκτέλεση του $\mathcal{I}$ είναι δίκαιη, το ίδιο ισχύει και για την εκτέλεση του $\mathcal{A}$.*

*Απόδειξη.* Λόγω του γεγονότος ότι οι διαδικασίες ανάθεσης προσδιοριστών και διάδοσης του μεγάθους του πληθυσμού ολοκληρώνονται σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων, αρκεί να μελετήσουμε τη δικαιοσύνη της εκτέλεσης του $\mathcal{A}$ μετά την ολοκλήρωσή τους. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η κατάσταση κάθε πράκτορα αποτελείται από μία $\mathcal{I}$-υποσυνιστώσα και μία $\mathcal{A}$-υποσυνιστώσα με προφανή περιεχόμενα. Συμβολίζουμε με $C_\mathcal{A}$ τη μοναδική υποφάση της $C$ που αποτελείται μόνο από τις $\mathcal{A}$-υποσυνιστώσες όλων των πρακτόρων. Παρατηρήστε ότι κάποια $C_\mathcal{A}$ μπορεί να αντιστοιχεί σε πολλές υπερφάσεις $C$. Υποθέστε ότι $C_\mathcal{A} \to C'_\mathcal{A}$ και ότι η $C_\mathcal{A}$ εμφανίζεται άπειρο αριθμό φορών (αφού εδώ θεωρούμε φάσεις του $\mathcal{A}$, αυτό το '$\to$' αναφέρεται σε ένα βήμα της εκτέλεσης του $\mathcal{A}$). Το $C_\mathcal{A} \to C'_\mathcal{A}$ συνεπάγεται ότι υπάρχουν υπερφάσεις $C$, $C'$ των $C_\mathcal{A}$, $C'_\mathcal{A}$, αντιστοίχως, τ.ώ. $C \to C'$ (μέσω ενός βήματος του $\mathcal{A}$ στην περίπτωση που $C_\mathcal{A} \neq C'_\mathcal{A}$). Λόγω της δικαιοσύνης του

$\mathcal{I}$, εάν η $C$ εμφανίζεται άπειρο αριθμό φορών, τότε το ίδιο θα πρέπει να ισχύει για όλες τις υπερφάσεις της. Η συλλογιστική έχει ως εξής. Όλες αυτές οι υπερφάσεις διαφέρουν μόνο στις $\mathcal{I}$-υποσυνιστώσες, δηλαδή διαφέρουν μόνο σε κάποιους ελέγχους μεταβλητών που πραγματοποιούνται από το $\mathcal{I}$ (το $\mathcal{I}$ δεν κάνει τίποτα άλλο μετά το πέρας της διαδικασίας ανάθεσης προσδιοριστών). Όμως όλες τους είναι προσβάσιμες από και μπορούν να φτάσουν σε μία υπερφάση της $C_{\mathcal{A}}$ κατά την οποία δεν πραγματοποιείται κανένας έλεγχος μεταβλητών από το $\mathcal{I}$, επομένως εξαρτώνται μόνο απ' το ποιοι πράκτορες επιλέγονται για αλληλεπίδραση και είναι όλες πρασβάσιμες μεταξύ τους. Αφού τουλάχιστον μία εξ' αυτών εμφανίζεται άπειρο αριθμό φορών, λόγω της δικαιοσύνης της εκτέλεσης του $\mathcal{I}$, θα πρέπει όλες τους να εμφανίζονται άπειρο αριθμό φορών γεγονός που ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω λήμματα μπορούμε να αποδείξουμε το ακόλουθο:

**Θεώρημα 24.** $PLM = SIPLM$.

*Απόδειξη.* Η $PLM \subseteq SIPLM$ είναι τετριμμένη, επομένως αρκεί να δ.ό. $SIPLM \subseteq PLM$. Για κάθε $p \in SIPLM$, έστω $\mathcal{A}$ το ΠΜΠ πρωτόκολλο που το υπολογίζει σταθερά σε χώρο $\mathcal{O}(\log n)$. Δείξαμε προηγουμένως ότι υπάρχει ένα πρωτόκολλο ΠΜ $\mathcal{I}$, που περιέχει το $\mathcal{A}$ ως υπορουτίνα (βλέπε Πρωτόκολλο 3), το οποίο αναθέτει τους διαδοχικούς μοναδικούς προσδιοριστές $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ στους πράκτορες (Λήμμα 8) και τους πληροφορεί για το πραγματικό μέγεθος του πληθυσμού (Λήμμα 9). Ύστερα κάθε πράκτορας που μαθαίνει το πραγματικό μέγεθος πληθυσμού αλληλεπιδρώντας με κάποιον που ήδη το γνωρίζει γίνεται τελικής επανεκκίνησης, υπό την έννοια ότι αρχίζει να εκτελεί το $\mathcal{A}$ απ' την αρχή και δε μπορεί να επανεκκινηθεί σε μελλοντικά βήματα (Λήμμα 9). Κατά τη διάρκεια αυτής της διαδικασίας διάδοσης, το $\mathcal{I}$ δεν επιτρέπει σε πράκτορες μη τελικής επανεκκίνησης, που πιθανόν περιέχουν απαρχαιωμένες πληροφορίες, να έχουν κάποια αποτελεσματική αλληλεπίδραση με πράκτορες τελικής επανεκκίνησης (Λήμμα 10). Επιπλέον, λόγω της διακοπτόμενης εκτέλεσης του $\mathcal{A}$, κανείς πράκτορας δε μπορεί να μείνει ποτέ απασχολημένος για άπειρο αριθμό βημάτων, επομένως, εξασφαλίζεται ότι οι επανεκκινήσεις μπορούν πάντα να εφαρμοστούν (Λήμμα 11). Τέλος, δεδομένου ότι η εκτέλεση του $\mathcal{I}$ είναι δίκαιη, το ίδιο ισχύει και για την εκτέλεση του $\mathcal{A}$ που προσομοιώνεται απ' το $\mathcal{I}$ (Λήμμα 12). Το $\mathcal{I}$ χρησιμοποιεί $\mathcal{O}(\log n)$ μνήμη για την εκτέλεση του $\mathcal{A}$ και $\mathcal{O}(\log n)$ μνήμη για να αποθηκεύει τους μοναδικούς προσδιοριστές και το μέγεθος του πληθυσμού, επομένως $\mathcal{O}(\log n)$ συνολικά. Αφού το $\mathcal{A}$ υπολογίζει σταθερά το $p$, το ίδιο ισχύει και για το $\mathcal{I}$ που προσομοιώνει σωστά το $\mathcal{A}$ και έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη. □

Δείχνουμε τώρα ότι κάθε συμμετρικό κατηγόρημα στην $SPACE(n \log n)$ ανήκει επίσης στην $SIPLM$.

**Θεώρημα 25.** *Η $SSPACE(n \log n)$ είναι υποσύνολο της $SIPLM$.*

*Αποδεικτική Ιδέα.* Το μοντέλο ΠΜΠ χρειάζεται χώρο $\mathcal{O}(\log n)$ για να προσομοιώσει μία αιτιοκρατική ΤΜ $\mathcal{M}$ χώρου $\mathcal{O}(\log n)$. Διαισθητικά, οι πράκτορες οργανώνονται σε μία ευθεία, κατά τέτοιο τρόπο που διαδοχικοί πράκτορες έχουν διαδοχικούς προσδιοριστές, και ένα κουπόνι προσομοίωσης καθορίζει τον πράκτορα που είναι υπεύθυνος για την προσομοίωση. Καθώς ο πράκτορας $u$ εκτελεί την προσομοίωση, κάθε κίνηση της κεφαλής ταινίας της $\mathcal{M}$ αντιστοιχεί στο πέρασμα του κουπονιού προσομοίωσης σε κάποιον απ' τους γειτονικούς πράκτορες. Με τον τρόπο αυτό, η κεφαλή ταινίας της $\mathcal{M}$ τροποποιεί τις ταινίες των πρακτόρων τμηματικά. □

*Απόδειξη.* Έστω $p : X^* \to \{0, 1\}$ οποιοδήποτε κατηγόρημα στην $SSPACE(n \log n)$ και $\mathcal{M}$ η αιτιοκρατική ΤΜ που το διαγιγνώσκει χρησιμοποιώντας χώρο $\mathcal{O}(n \log n)$. Κατασκευάζουμε ένα πρωτόκολλο ΠΜΠ $\mathcal{A}$ που υπολογίζει σταθερά το $p$. Έστω $x$ οποιαδήποτε ανάθεση εισόδου στο $X^*$. Κάθε πράκτορας λαμβάνει το σύμβολο εισόδου του σύμφωνα με την $x$ (δηλαδή ο $u$ λαμβάνει το σύμβολο $x(u)$). Οι πράκτορες έχουν τους μοναδικούς προσδιοριστές $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ και γνωρίζουν το μέγεθος του πληθυσμού $n$.

Επιπλέον, χάριν ευκολίας υποθέτουμε ότι οι πράκτορες είναι εφοδιασμένοι με μία επιπλέον ταινία, την *ταινία προσομοίωσης* που χρησιμοποιείται κατά τη διάρκεια της προσομοίωσης. Ο πράκτορας που έχει τον μοναδικό προσδιοριστή 0 αρχίζει να προσομοιώνει την $\mathcal{M}$.

Γενικά, υποθέστε ότι η προσομοίωση εκτελείται στο τρέχον βήμα από κάποιον πράκτορα $u$ που έχει τον προσδιοριστή $i_u$. Ο πράκτορας $u$ χρησιμοποιεί την ταινία προσομοίωσης που διαθέτει για να γράφει σύμβολα σύμφωνα με τη συνάρτηση μεταβάσεων της $\mathcal{M}$. Κάθε φορά που η κεφαλή της $\mathcal{M}$ κινείται δεξιά, ο $u$ μετακινεί την κεφαλή της ταινίας προσομοίωσης ένα βήμα προς τα δεξιά, παύει την προσομοίωση, γράφει την τρέχουσα κατάσταση της $\mathcal{M}$ στην ταινία εξερχομένων μηνυμάτων και μεταβιβάζει την προσομοίωση στον πράκτορα $v$ που έχει τον προσδιοριστή $i_v = (i_u + 1) \mod n$. Κάθε φορά που η κεφαλή της $\mathcal{M}$ κινείται αριστερά, ο $u$ παύει την προσομοίωση, γράφει την τρέχουσα κατάσταση της $\mathcal{M}$ στην ταινία εξερχομένων μηνυμάτων και μεταβιβάζει την προσομοίωση στον πράκτορα $v$ που έχει τον προσδιοριστή $i_v = (i_u - 1) \mod n$. Από τη σκοπιά του πράκτορα $v$, στην πρώτη περίπτωση αυτός απλώς λαμβάνει την κατάσταση της $\mathcal{M}$, την αντιγράφει στην ταινία εργασίας και αρχίζει την προσομοίωση, ενώ στη δεύτερη περίπτωση επιπλέον μετακινεί την κεφαλή της ταινίας προσομοίωσης ένα βήμα προς τ' αριστερά πριν αρχίσει την προσομοίωση.

Απομένει να καλύψουμε την οριακή περίπτωση στην οποία η κεφαλή της ταινίας προσομοίωσης βρίσκεται πάνω από το ειδικό σύμβολο που υποδεικνύει την αρχή της ταινίας. Στην περίπτωση αυτή, ο πράκτορας μετακινεί την κεφαλή δεξιά και συνεχίζει ο ίδιος την προσομοίωση (παρατηρήστε ότι αυτό μπορεί να συμβεί μόνο στον πράκτορα που ξεκινάει την προσομοίωση, δηλαδή μόνο σε αυτόν που έχει τον προσδιοριστή 0).

Αν ποτέ, κατά τη διάρκεια της προσομοίωσης, η $\mathcal{M}$ αποδεχθεί, τότε αποδέχεται επίσης και το $\mathcal{A}$· δηλαδή, ο πράκτορας που εντοπίζει την αποδοχή της $\mathcal{M}$ γράφει 1 στην ταινία εξόδου του και ενημερώνει όλους τους πράκτορες να αποδεχθούν. Εάν η $\mathcal{M}$ απορρίψει, το ίδιο κάνει και το $\mathcal{A}$. Τέλος, παρατηρήστε ότι το $\mathcal{A}$ προσομοιώνει τη

$\mathcal{M}$ όχι απαραίτητα για είσοδο $x = \sigma_0\sigma_1 \dots \sigma_{n-1}$ αλλά για κάποια $x'$ που αποτελεί μία αντιμετάθεση της $x$. Ο λόγος είναι ότι ο πράκτορας με προσδιοριστή $i$ δε λαμβάνει απαραιτήτως την είσοδο $\sigma_i$. Η κρίσιμη παρατήρηση που ολοκληρώνει την απόδειξη είναι ότι η $\mathcal{M}$ αποδέχεται την $x$ ανν αποδέχεται την $x'$, αφού το $p$ είναι συμμετρικό.

Λόγω της παραπάνω διαδικασίας, είναι εύκολο να επαληθεύσουμε ότι το $k$-στό κελί της ταινίας προσομοίωσης οποιουδήποτε πράκτορα $u$ που έχει τον προσδιοριστή $i_u$ αντιστοιχεί στο $(n{\cdot}k{+}i_u)$-στό κελί της $\mathcal{M}$. Επομένως, όποτε η $\mathcal{M}$ τροποποιεί $l = \mathcal{O}(n \log n)$ κελιά ταινίας, κάθε πράκτορας $u$ θα τροποποιεί $l' = \frac{l-i_u}{n} = \mathcal{O}(\log n)$ κελιά της ταινίας προσομοίωσής του. □

**Θεώρημα 26.** *Η $SSPACE(n \log n)$ είναι υποσύνολο της $PLM$.*

*Απόδειξη.* Προκύπτει απ' την $SSPACE(n \log n) \subseteq SIPLM = PLM$. □

**Πόρισμα 6.** *Η $SNSPACE(\sqrt{n \log n})$ είναι υποσύνολο της $PLM$.*

*Απόδειξη.* Προκύπτει απ' το Θεώρημα 26 και το θεώρημα του Savitch [49]. □

## 4.4 Ένας Καλύτερος Εγκλεισμός για την $PLM$

Στην Ενότητα αυτή δείχνουμε με δύο διαφορετικούς τρόπους ότι η $SNSPACE(n \log n)$ είναι υποσύνολο της $PLM$ βελτιώνοντας έτσι τον εγκλεισμό του Θεωρήματος 26.

### 4.4.1 Τα Πρωτόκολλα ΠΑΛΟΜΑ Προσομοιώνουν τα ΠΚ

Εδώ δείχνουμε ότι το μοντέλο ΠΜ προσομοιώνει το μοντέλο ΠΚ, χρησιμοποιώντας $\mathcal{O}(\log n)$ μνήμη σε κάθε πράκτορα. Αυτός είναι ο πρώτος τρόπος για να θεσπίσουμε ότι $SNSPACE(n \log n) \subseteq PLM$. Υπενθυμίζουμε ότι με $CP$ συμβολίζουμε την κλάση των κατηγορημάτων που είναι σταθερά υπολογίσιμα απ' το μοντέλο ΠΚ. Στην [39] αποδείχθηκε ότι η $CP$ είναι ίση με την $SNSPACE(n \log n)$.

**Ορισμός 15.** *Έστω $RCP$ η κλάση όλων των κατηγορημάτων που είναι σταθερά υπολογίσιμα από μία περιορισμένη έκδοση του μοντέλου ΠΚ στην οποία οι πράκτορες μπορούν να έχουν μόνο τους μοναδικούς προσδιοριστές $\{0, 1, \ldots, n-1\}$.*

Αρχικά δ.ό. το παραπάνω περιορισμένο μοντέλο είναι ισοδύναμο με το μοντέλο ΠΚ.

**Λήμμα 13.** *$RCP = CP$.*

*Απόδειξη.* Η $RCP \subseteq CP$ ισχύει τετριμμένα. Απομένει να δ.ό. $CP \subseteq RCP$. Αφού το μοντέλο ΠΚ μπορεί μόνο να εκτελεί συγκρίσεις μεταξύ προσδιοριστών, προκύπτει ότι εάν αντικαταστήσουμε κάθε διάνυσμα μοναδικών προσδιοριστών $(id_0, id_1, \ldots, id_{n-1})$, όπου οι δείκτες είναι πράκτορες και $id_0 < id_1 < \ldots < id_{n-1}$, από τους μοναδικούς προσδιοριστές $(0, 1, \ldots, n-1)$ (διατηρώντας με τον τρόπο αυτό τη διάταξη των πρακτόρων ως προς τους προσδιοριστές τους) τότε οι υπολογισμοί που προκύπτουν και στις δύο περιπτώσεις θα πρέπει να είναι ταυτόσημοι. □

**Λήμμα 14.** *Η $RCP$ είναι υποσύνολο της $SIPLM$.*

*Απόδειξη.* Τα πρωτόκολλα ΠΑΛΟΜΑ που έχουν ήδη τους μοναδικούς προσδιοριστές $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ και γνωρίζουν το μέγεθος του πληθυσμού μπορούν να κάνουν ό, τι και τα ΠΚ που έχουν τους ίδιους προσδιοριστές και επιπλέον μπορούν να εκτελούν αυθαίρετες πράξεις πάνω στους προσδιοριστές (και όχι μόνο συγκρίσεις). □

Λόγω του ότι, σύμφωνα με το Θεώρημα 24, η $SIPLM$ είναι ίση με την $PLM$, μόλις φτάσαμε στο ακόλουθο αποτέλεσμα.

**Θεώρημα 27.** *Η $CP$ είναι υποσύνολο της $PLM$.*

*Απόδειξη.* Προκύπτει απ' τις $CP = RCP \subseteq SIPLM = PLM$. □

**Θεώρημα 28.** *Η* $SNSPACE(n \log n)$ *είναι υποσύνολο της* $PLM$.

*Απόδειξη.* Έχει αποδειχθεί στην [39] ότι η $SNSPACE(n \log n)$ είναι υποσύνολο της $CP$. Έπειτα απλώς λαμβάνουμε υπ' όψιν το Θεώρημα 27. □

### 4.4.2 Τα Πρωτόκολλα ΠΑΛΟΜΑ Προσομοιώνουν Απευθείας Ανταιτιοκρατικές Μηχανές Turing Χώρου $\mathcal{O}(n \log n)$

Παρατηρήστε ότι η απόδειξη του Θεωρήματος 28 εξαρτάται από το ακόλουθο αποτέλεσμα της [54]: Μία Μηχανή Μετατροπής Αποθήκευσης μπορεί να προσομοιώσει μία TM. Ο λόγος είναι ότι στην [39] δόθηκε μία έμμεση απόδειξη του γεγονότος ότι η $SNSPACE(n \log n)$ είναι υποσύνολο της $CP$. Συγκεκριμένα, αποδείχθηκε ότι τα ΠΚ μπορούν να προσομοιώσουν μία Μηχανή Μετατροπής Αποθήκευσης και έπειτα χρησιμοποιήθηκε το αποτέλεσμα της [54] για να θεσπίσει ότι τα ΠΚ μπορούν να προσομοιώσουν μία ανταιτιοκρατική TM. Για να αποφύγουμε αυτή την εξάρτηση του αποτελέσματός μας από την προσομοίωση μιας Μηχανής Μετατροπής Αποθήκευσης, γενικεύουμε τις ιδέες που χρησιμοποιήθηκαν στην απόδειξη του Θεωρήματος 24 και παρέχουμε μία άμεση προσομοίωση μίας ανταιτιοκρατικής TM χώρου $\mathcal{O}(n \log n)$ από το μοντέλο ΠΜ με τους πράκτορες να χρησιμοποιούν χώρο $\mathcal{O}(\log n)$.

**Θεώρημα 29.** *Η* $SNSPACE(n \log n)$ *είναι υποσύνολο της* $PLM$.

*Απόδειξη.* Λόγω του Θεωρήματος 24, αρκεί να δ.ό. η $SNSPACE(n \log n)$ είναι υποσύνολο της $SIPLM$. Έχουμε ήδη δείξει ότι το μοντέλο ΠΜΠ μπορεί να προσομοιώσει μία αιτιοκρατική TM $\mathcal{M}$ χώρου $\mathcal{O}(n \log n)$ χρησιμοποιώντας χώρο $\mathcal{O}(\log n)$ (Θεώρημα 25). Παρουσιάζουμε τώρα κάποιες τροποποιήσεις που θα μας επιτρέψουν να προσομοιώσουμε μία ανταιτιοκρατική ΤΜ $\mathcal{N}$ ίδιου χωρικού φράγματος. Έχετε υπ' όψιν ότι η $\mathcal{N}$ είναι διαγνώστης κάποιου κατηγορήματος της $SNSPACE(n \log n)$, συνεπώς πάντα τερματίζει. Κατά την αρχικοποίηση, κάθε πράκτορας μπαίνει σε μία απορριπτική κατάσταση (γράφει 0 στην ταινία εξόδου του) και η προσομοίωση εκτελείται όπως και στην περίπτωση της $\mathcal{M}$.

Όποτε πρέπει να γίνει κάποια ανταιτιοκρατική επιλογή, ο αντίστοιχος πράκτορας γίνεται έτοιμος και περιμένει τη συμμετοχή του σε μία αλληλεπίδραση. Ο προσδιοριστής του άλλου πράκτορα θα υποδείξει την ανταιτιοκρατική επιλογή που πρέπει να γίνει. Μία πιθανή υλοποίηση της ιδέας αυτής είναι η ακόλουθη. Αφού υπάρχει κάποιο σταθερό άνω φράγμα στο πλήθος των ανταιτιοκρατικών επιλογών (ανεξάρτητο του μεγέθους του πληθυσμού), οι πράκτορες μπορούν να αποθηκεύουν τις επιλογές αυτές στη μνήμη τους. Κάθε φορά που πρέπει να παρθεί μία ανταιτιοκρατική απόφαση μεταξύ $k$ υποψηφίων, ο πράκτορας αναθέτει τους αριθμούς $0, 1, \ldots, k-1$ στους υποψηφίους αυτούς και γίνεται έτοιμος για αλληλεπίδραση. Υποθέστε ότι η επόμενη αλληλεπίδραση είναι με κάποιον πράκτορα του οποίου ο προσδιοριστής είναι $i$. Τότε η ανταιτιοκρατική επιλογή που κάνει ο πράκτορας είναι αυτή στην οποία έχει ανατεθεί ο αριθμός $i \mod k$. Η δικαιοσύνη εξασφαλίζει ότι με τον τρόπο αυτό όλα τα πιθανά μονοπάτια που αναπαριστούν τον ανταιτιοκρατικό υπολογισμό της $\mathcal{N}$ τελικά θα ακολουθηθούν.

Κάθε φορά που η προσομοίωση φτάνει σε μία αποδεκτική κατάσταση, όλοι οι πράκτορες αλλάζουν την έξοδό τους σε 1 και η προσομοίωση τερματίζει. Επιπλέον, κάθε φορά που η προσομοίωση φτάνει σε μία απορριπτική κατάσταση, επανεκκινείται. Η ορθότητα της διαδικασίας αυτής καλύπτεται απ' τις ακόλουθες δύο περιπτώσεις.

1. *Εάν η $\mathcal{N}$ απορρίψει τότε η έξοδος κάθε πράκτορα σταθεροποιείται στην τιμή* 0. Κατά την αρχικοποίηση η έξοδος κάθε πράκτορα είναι 0 και μπορεί να αλλάξει μόνο εάν η $\mathcal{N}$ φτάσει σε μία αποδεκτική κατάσταση. Όμως όλοι οι κλάδοι του υπολογισμού

της $\mathcal{N}$ απορρίπτουν, επομένως δε βρίσκεται ποτέ κατάσταση αποδοχής και η έξοδος κάθε πράκτορα παραμένει για πάντα στην τιμή 0.

2. *Εάν η $\mathcal{N}$ αποδεχθεί τότε η έξοδος κάθε πράκτορα σταθεροποιείται στην τιμή* 1. Αφού η $\mathcal{N}$ αποδέχεται, υπάρχει κάποια ακολουθία φάσεων $S$, που ξεκινάει απ' την αρχική φάση $C$ και οδηγεί σε κάποια φάση $C'$ κατά την οποία η έξοδος κάθε πράκτορα είναι 1 (προσομοιώνοντας απευθείας τον κλάδο της $\mathcal{N}$ που αποδέχεται). Παρατηρήστε ότι όταν ένας πράκτορας θέτει την έξοδό του στην τιμή 1 δεν ξανατροποποιεί την έξοδό του, επομένως αρκεί να δ.ό. η προσομοίωση τελικά φτάνει στη $C'$. Υποθέστε ότι δε φτάνει. Αφού η $\mathcal{N}$ τερματίζει πάντα, η προσομοίωση θα βρίσκεται στην αρχική διαμόρφωση $C$ άπειρο αριθμό φορών (λόγω των επανεκκινήσεων). Λόγω της δικαιοσύνης, με μία εύκολη επαγωγή πάνω στις φάσεις του $S$, η $C'$ θα εμφανίζεται επίσης άπειρο αριθμό φορών, πράγμα που είναι άτοπο. Επομένως η προσομοίωση φτάνει τελικά στην $C'$ και η έξοδος σταθεροποιείται στην τιμή 1.

$\square$

## 4.5 Ένας Ακριβής Χαρακτηρισμός για την $PLM$

Πρώτα δ.ό. $PLM \subseteq NSPACE(n \log n)$.

**Θεώρημα 30.** *Όλα τα κατηγορήματα της $PLM$ ανήκουν στην κλάση $NSPACE(n \log n)$.*

*Αποδεικτική Ιδέα.* Η απόδειξη είναι παρόμοια με αυτές που επιτυγχάνουν τους αντίστοιχους εγκλεισμούς για τα μοντέλα ΠΠΔ (Θεώρημα 11) και ΠΚ [12]. Συγκεκριμένα, αρκεί να δ.ό. η γλώσσα που αντιστοιχεί σε οποιοδήποτε κατηγόρημα της $PLM$ μπορεί να διαγνωστεί από μία ανταιτιοκρατική ΤΜ χώρου $\mathcal{O}(n \log n)$. Η ΤΜ μαντεύει την επόμενη φάση και ελέγχει εάν αυτή στην οποία έφτασε είναι σταθερής εξόδου. Παρατηρήστε ότι $\mathcal{O}(n \log n)$ χώρος επαρκεί, επειδή μία φάση πληθυσμού αποτελείται από $n$ φάσεις πρακτόρων κάθε μία μεγέθους $\mathcal{O}(\log n)$. $\square$

**Θεώρημα 31.** *Η $PLM$ είναι ίση με την $SNSPACE(n \log n)$.*

*Απόδειξη.* Προκύπτει απ' το Θεώρημα 28 (ή ισοδύναμα το Θεώρημα 29), το οποίο θεσπίζει ότι $SNSPACE(n \log n) \subseteq PLM$, και το Θεώρημα 30, το οποίο θεσπίζει ότι $PLM \subseteq NSPACE(n \log n)$· όμως για κάθε $p \in PLM$, ισχύει ότι το $p$ είναι συμμετρικό (Παρατήρηση 6), επομένως $PLM \subseteq SNSPACE(n \log n)$. $\square$

# Κεφάλαιο 5

# Χωρική Ιεραρχία του Μοντέλου των Παθητικά Κινούμενων Μηχανών

## 5.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό μας ενδιαφέρει η συμπεριφορά του μοντέλου ΠΜ για διαφορετικά χωρικά φράγματα. Μία τέτοια μελέτη έχει ιδιαίτερη αξία αφού είναι πολύ σημαντικό να γνωρίζουμε τι υπολογισμούς μπορεί να φέρει εις πέρας το μοντέλο μας ανάλογα με τις δυνατότητες του υλικού. Για παράδειγμα, εύλογο είναι το ερώτημα σχετικά με το εάν περισσότερη διαθέσιμη μνήμη στους πράκτορες συνεπάγεται περισσότερες υπολογιστικές δυνατότητες για όλα τα μεγέθη μνήμης. Πώς ακριβώς αυξάνουν οι υπολογιστικές δυνατότητες συναρτήσει της αύξησης της μνήμης; Υπάρχουν μεγέθη μνήμης με ξεχωριστές ιδιότητες που τους δίνουν κάποια εξέχουσα σημασία και τα καθιστούν καταλληλότερα από άλλα;

Στα περισσότερα από αυτά τα ερωτήματα δίνουμε αρκετά ικανοποιητικές απαντήσεις. Συγκεκριμένα, δείχουμε ότι:

- Για $f(n) = \Omega(\log n)$ ισχύει ότι $PMSPACE(f(n)) = SNSPACE(nf(n))$. Ως εκ τούτου, λάμβανοντας υπ' όψιν το θεώρημα συμμετρικής χωρικής ιεραρχίας (Θεώρημα 33) προκύπτει και χωρική ιεραρχία για το δικό μας μοντέλο. Με απλά λόγια, γι' αυτά τα χωρικά φράγματα, πρωτόκολλα που χρησιμοποιούν περισσότερη μνήμη μπορούν να υπολογίσουν αυστηρά περισσότερα πράγματα.

- Για $f(n) = o(\log n)$ ισχύει ότι η $PMSPACE(f(n))$ είναι αυστηρά μικρότερη απ' την $SNSPACE(nf(n))$, επομένως το $\log n$ συμπεριφέρεται ως κατώφλι. Αυτό μας δείχνει ότι η συμπεριφορά του μοντέλου μεταβάλλεται σημαντικά (προς το καλύτερο) στο χωρικό φράγμα $\log n$ και αν λάβουμε υπ' όψιν μας το γεγονός ότι μνήμες μεγέθους $\log n$ είναι πραγματικά μικρές μνήμες, φαίνεται να δικαιολογείται η επιλογή μας να εστιάσουμε σε αυτό το χωρικό φράγμα ως το πλέον ρεαλιστικό γι' αυτού του είδους τα συστήματα.

- Για $f(n) = o(\log\log n)$ ισχύει ότι η $PMSPACE(f(n))$ είναι ακριβώς η κλάση των ημιγραμμικών κατηγορημάτων (αποτέλεσμα που οφείλεται σε μία εξαιρετική έμπνευση του Ανδρέα Παυλόγιαννη)! Αυτό σημαίνει ότι για μνήμες αυστηρά μικρότερες του $\log\log n$ τα πρωτόκολλα ΠΜ δεν είναι τίποτα άλλο από πρωτόκολλα πληθυσμών και, παρά το γεγονός ότι έχουν μνήμη εξαρτώμενη απ' το μέγεθος του πληθυσμού, δε μπορούν να τη χρησιμοποιήσουν ως τέτοια· αντ' αυτού τη χρησιμοποιούν αναγκαστικά ως μία σταθερή μνήμη όπως ακριβώς και τα πρωτόκολλα πληθυσμών. Το αποτέλεσμα αυτό μας δείχνει ακόμα ότι γι' αυτά τα μικρά χωρικά φράγματα δεν ισχύει η χωρική ιεραρχία. Επιπλέον δείχνουμε ότι το πρώτο σημείο στο οποίο ισχύει η χωρική ιεραρχία για το μοντέλο ΠΜ είναι το $f(n) = \Omega(\log\log n)$. Για να το κάνουμε αυτό παρουσιάζουμε ένα τέτοιο πρωτόκολλο που υπολογίζει το μη ημιγραμμικό κατηγόρημα $(\log N_a = c)$, όπου $c$

σταθερά. Έτσι, προκύπτει ότι η $PMSPACE(f(n))$ είναι εδώ αυστηρά μεγαλύτερη απ' την κλάση των ημιγραμμικών κατηγορημάτων, άρα και το $\log\log n$ εμφανίζει συμπεριφορά κατωφλίου.

Ανοικτό παραμένει το τι ακριβώς συμβαίνει μεταξύ $\log\log n$ και $\log n$.

## 5.2 Χωρική Ιεραρχία

**Θεώρημα 32.** *Για κάθε συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, κάθε κατηγόρημα στην $PMSPACE(f(n))$ ανήκει επίσης στην $SNSPACE(2^{f(n)}(f(n) + \log n))$.*

*Απόδειξη.* Θεωρήστε οποιοδήποτε $p \in PMSPACE(f(n))$. Έστω $\mathcal{A}$ το πρωτόκολλο ΠΜ που υπολογίζει το $p$ σε χώρο $\mathcal{O}(f(n))$. Ως γνωστόν $L_p = \{\sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_n \mid \sigma_i \in X$ για κάθε $i \in \{1, \ldots, n\}$ και $p(\sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_n) = 1\}$ είναι η γλώσσα που αντιστοιχεί στο $p$. Περιγράφουμε μία ανταιτιοκρατική ΤΜ $\mathcal{N}$ που διαγιγνώσκει την $L_p$ σε χώρο $g(n) = \mathcal{O}(2^{f(n)}(f(n) + \log n))$.

Παρατηρήστε ότι κάθε πράκτορας χρησιμοποιεί χώρο $\mathcal{O}(f(n))$. Επομένως, υποθέτοντας ένα δυαδικό αλφάβητο ταινίας $\Gamma = \{0, 1\}$, μία υπόθεση που δε βλάπτει τη γενικότητα, υπάρχουν $2^{\mathcal{O}(f(n))}$ διαφορετικές φάσεις πρακτόρων κάθε μία μεγέθους $\mathcal{O}(f(n))$. Η $\mathcal{N}$ αποθηκεύει μία φάση πληθυσμού αποθηκεύοντας όλες αυτές τις φάσεις πρακτόρων, καταναλώνοντας για το σκοπό αυτό χώρο $\mathcal{O}(f(n)2^{f(n)})$, μαζί με έναν αριθμό για κάθε φάση πράκτορα που αναπαριστά το πλήθος των πρακτόρων που βρίσκονται σε αυτή τη φάση πράκτορα κατά την τρέχουσα φάση πληθυσμού. Αυτοί οι αριθμοί αθροίζουν στο $n$ και κάθε ένας χρειάζεται $\mathcal{O}(\log n)$ δυφία για να αναπαρασταθεί, επομένως χρειάζεται $\mathcal{O}(2^{f(n)} \log n)$ επιπλέον χώρος. Άρα, συνολικά χρειάζεται χώρος $\mathcal{O}(2^{f(n)}(f(n) + \log n))$ για την αποθήκευση μίας φάσης πληθυσμού. Ο λόγος για τον οποίο αυτές οι αναπαραστάσεις των φάσεων πληθυσμού είναι επαρκείς είναι ότι όταν $k$ πράκτορες βρίσκονται στην ίδια εσωτερική φάση δεν υπάρχει κανένας λόγος να την αποθηκεύσουμε $k$ φορές. Η πληρότητα του γραφήματος επικοινωνίας μας επιτρέπει να την αποθηκεύσουμε μία μόνο φορά και απλώς να σημειώσουμε το πλήθος των πρακτόρων που βρίσκονται σε αυτήν την κοινή εσωτερική φάση, δηλαδή το $k$.

Τώρα η $\mathcal{N}$ απλώς κάνει ό, τι και η ανταιτιοκρατικές μηχανές Turing των Θεωρημάτων 11 και 30 με τη διαφορά ότι αποθηκεύει τις φάσεις πληθυσμού βάσει της νέας αναπαράστασης που ορίσαμε. □

**Θεώρημα 33** (Θεώρημα Συμμετρικής Χωρικής Ιεραρχίας)**.** *Για κάθε συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, υπάρχει μία συμμετρική γλώσσα $L$ που είναι διαγνώσιμη σε (αντ)αιτιοκρατικό χώρο $\mathcal{O}(f(n))$ αλλά όχι σε (αντ)αιτιοκρατικό χώρο $o(f(n))$.*

*Απόδειξη.* Προκύπτει άμεσα απ' τη μονοσυμβολική γλώσσα διαχωρισμού που παρουσιάστηκε στην [33] και απ' το γεγονός ότι κάθε μονοσυμβολική γλώσσα είναι συμμετρική. □

**Πόρισμα 7.** *Για κάθε συνάρτηση $f(n) = o(\log n)$ ισχύει ότι $PMSPACE(f(n)) \subsetneq SNSPACE(nf(n))$.*

*Απόδειξη.* Λόγω του Θεωρήματος 32 και του θεωρήματος της συμμετρικής χωρικής ιεραρχίας (Θεώρημα 33) αρκεί να δ.ό. $2^{f(n)}(f(n) + \log n) = o(nf(n))$ για $f(n) = o(\log n)$. Έχουμε ότι

$$2^{f(n)}(f(n) + \log n) = 2^{o(\log n)}\mathcal{O}(\log n) = o(n)\mathcal{O}(\log n),$$

η οποία προφανώς αυξάνει πιο αργά απ' την $nf(n) = n \cdot o(\log n)$. □

Έτσι, για παράδειγμα, εάν $f(n) = \log\log n$, τότε $PMSPACE(\log\log n) \subseteq SNSPACE(\log^2 n)$ η οποία είναι αυστηρά μικρότερη απ' την $SNSPACE(nf(n)) = SNSPACE(n \log\log n)$ λόγω του θεωρήματος της συμμετρικής χωρικής ιεραρχίας. Ένα άλλο ενδιαφέρον παράδειγμα προκύπτει αν θέσουμε $f(n) = c$. Στην περίπτωση αυτή παίρνουμε την $SNSPACE(\log n) = SNL$ (όπου $SNL$ είναι η κλάση όλων των συμμετρικών γλωσσών που είναι υπολογίσιμες σε ανταιτιοκρατικό λογαριθμικό χώρο) που αποτελεί τον εγκλεισμό για τα ΠΠ που έδωσαν οι Angluin κ.λπ στην [7] (τον οποίο βελτίωσαν στην [8] φτάνοντας στον ακριβή χαρακτηρισμό).

Παρότι οι παραπάνω εγκλεισμοί είναι σχετικά σφιχτοί για χωρικές συναρτήσεις $f(n) \leq \log n$, για $f(n) > \log n$ είναι χειρότεροι σε σχέση με την $nf(n)$. Στο ακόλουθο θεώρημα παρουσιάζουμε πιο σφιχτούς εγκλεισμούς για $f(n) = \Omega(\log n)$ ακολουθώντας την άμεση αναπαράσταση των φάσεων πληθυσμού.

**Θεώρημα 34.** *Για κάθε συνάρτηση $f(n)$ ισχύει ότι η $PMSPACE(f(n))$ είναι υποσύνολο της $SNSPACE(nf(n))$.*

*Απόδειξη.* Η απόδειξη αυτή είναι παρόμοια με την απόδειξη του Θεωρήματος 30 που θεσπίζει ότι η $PLM$ είναι υποσύνολο της $SNSPACE(n \log n)$. Χρησιμοποιώντας παρόμοια επιχειρήματα μπορούμε να δ.ό. όλα τα κατηγορήματα της $PMSPACE(f(n))$ ανήκουν επίσης στην $SNSPACE(nf(n))$. Συγκεκριμένα, υπάρχει μία ανταιτιοκρατική TM $\mathcal{N}'$ χώρου $\mathcal{O}(nf(n))$ που διαγιγνώσκει τη γλώσσα $L_p$ κάθε κατηγορήματος $p$ της $PMSPACE(f(n))$. Η $\mathcal{N}'$ αποθηκεύει τις εσωτερικές φάσεις $n$ πρακτόρων κάθε μία εκ των οποίων καταλαμβάνει χώρο $\mathcal{O}(f(n))$ και επομένως κάθε φάση πληθυσμού καταλαμβάνει στην ταινία της $\mathcal{N}'$ $\mathcal{O}(nf(n))$ χώρο. Η $\mathcal{N}'$ ξεκινάει απ' την αρχική φάση $C$, μαντεύει την επόμενη $C'$ και ελέγχει εάν έχει φτάσει σε μία φάση στην οποία όλοι οι πράκτορες δίνουν τη σωστή έξοδο για το $p$. Όταν η $\mathcal{N}'$ φτάσει σε μία τέτοια φάση $C$ υπολογίζει ένα παρόμοιο πρόβλημα αναζήτησης: επαληθεύει ότι δεν υπάρχει καμία φάση προσβάσιμη απ' τη $C$ στην οποία κάποιος πράκτορας να μη δίνει τη σωστή έξοδο για το $p$. Αυτή η συνθήκη μπορεί επίσης να επαληθευτεί σε χώρο $\mathcal{O}(nf(n))$ αφού η $NSPACE$ είναι κλειστή ως προς το συμπλήρωμα για όλες τις χωρικές συναρτήσεις $g(n) = \Omega(\log n)$ (θεώρημα Immerman-Szelepcsényi [47], σελίδες 151-153). Παρατηρήστε ότι για κάθε εύλογη συνάρτηση $f(n)$, ισχύει ότι $g(n) = nf(n) \geq \log n$, όπως απαιτεί το θεώρημα Immerman-Szelepcsényi. $\square$

Για $f(n) = \Omega(\log n)$, οι εγκλεισμοί που μόλις παρουσιάσαμε είναι προφανώς καλύτεροι από αυτούς του Θεωρήματος 32. Παρατηρήστε ωστόσο ότι το Θεώρημα 34 ισχύει επίσης και για $f(n) = o(\log n)$ και ότι για τέτοιες χωρικές συναρτήσεις οι εγκλεισμοί που εξασφαλίζει είναι χειρότεροι από αυτούς του Θεωρήματος 32. Για να γίνει αυτό πιο σαφές, θεωρήστε τη συνάρτηση $f(n) = c$ (όπου κάθε πράκτορας χρησιμοποιεί χώρο ανεξάρτητο του μεγέθους του πληθυσμού και έτσι για τη συνάρτηση αυτή το μοντέλο ΠΜ είναι ισοδύναμο με το μοντέλο ΠΠ). Σύμφωνα με το Θεώρημα 34, ο αντίστοιχος εγκλεισμός είναι η τετριμμένη $SNSPACE(n)$, ενώ το Θεώρημα 32 βελτιώνει σε $SNSPACE(\log n)$. Αυτή η συμπεριφορά είναι αναμενόμενη λόγω της αναπαράστασης των φάσεων πληθυσμού που χρησιμοποιεί το κάθε θεώρημα. Όταν η φάση αποθηκεύεται ως ένα $n$-διάνυσμα όπου κάθε συνιστώσα είναι μία εσωτερική φάση ενός πράκτορα (αναπαράσταση που χρησιμοποιεί το Θεώρημα 34) τότε καθώς η χωρική συνάρτηση αυξάνει, ο χώρος αναπαράστασης αυξάνει γραμμικά. Από την άλλη, όταν η φάση αναπαρίσταται ως ένα διάνυσμα μεγέθους ίσο με το πλήθος των διαφορετικών εσωτερικών φάσεων όπου κάθε συνιστώσα του αντιπροσωπεύει το πλήθος των πρακτόρων που βρίσκονται στην αντίστοιχη εσωτερική φάση (όπως στο Θεώρημα 32) τότε το μέγεθος του διανύσματος αυξάνει εκθετικά ως προς την αύξηση της χωρικής συνάρτησης. Επομένως, το Θεώρημα 34 δίνει πιο σφιχτούς εγκλεισμούς για συναρτήσεις $f(n) = \Omega(\log n)$ ενώ το Θεώρημα 32 δίνει καλύτερους εγκλεισμούς για $f(n) = o(\log n)$. Παρατηρήστε ότι για $f(n) = \log n$ και οι δύο αναπαραστάσεις δίνουν τον ίδιο εγκλεισμό.

Το ακόλουθο θεώρημα δείχνει ότι για χωρικές συναρτήσεις $f(n) = \Omega(\log n)$ το μοντέλο ΠΜ μπορεί να προσομοιώσει μία ανταιτιοκρατική TM χώρου $\mathcal{O}(nf(n))$ χρησιμοποιώντας χώρο $\mathcal{O}(f(n))$. Το θεώρημα προκύπτει σχετικά εύκολα απ' την απόδειξη του Θεωρήματος 24. Διαισθητικά, με μνήμη τουλάχιστον $\log n$ σε κάθε πράκτορα μπορούμε πάντα να αναθέσουμε μοναδικούς προσδιοριστές και να διαδώσουμε το μέγεθος του πληθυσμού, άρα πάντα θα μπορούμε να μετατρέψουμε όλον τον πληθυσμό σε μία κατανεμημένη ανταιτιοκρατική ΤΜ όπου κάθε ένας από τους $n$ πράκτορες συνεισφέρει χώρο $\mathcal{O}(f(n))$ στην προσομοίωση.

**Θεώρημα 35.** *Για κάθε $f(n) = \Omega(\log n)$ ισχύει ότι η $SNSPACE(nf(n))$ είναι υποσύνολο της $PMSPACE(f(n))$.*

*Απόδειξη.* Στο Θεώρημα 29 μία ανταιτιοκρατική ΤΜ χώρου $\mathcal{O}(n \log n)$ προσομοιώνεται απ' το μοντέλο ΠΑΛΟΜΑ δοθέντος ότι όλοι οι πράκτορες ξέρουν το μέγεθος του πληθυσμού και έχουν μοναδικούς προσδιοριστές. Επιπλέον, στο Θεώρημα 24 παρουσιάσαμε μία κατασκευή που επιτρέπει στα πρωτόκολλα ΠΑΛΟΜΑ να υποθέτουν την ύπαρξη μοναδικών προσδιοριστών και γνώση του μεγέθους του πληθυσμού. Η ίδια κατασκευή μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για τα πρωτόκολλα εκείνα τα οποία χρησιμοποιούν $\mathcal{O}(f(n))$ χώρο, για $f(n) = \Omega(\log n)$. Ο λόγος είναι ότι σε τόσο χώρο οι πράκτορες μπορούν να αποθηκεύσουν τόσο μοναδικούς προσδιοριστές όσο και το μέγεθος του πληθυσμού. Επομένως, μπορεί και εδώ να χρησιμοποιηθεί το ίδιο πρωτόκολλο $\mathcal{I}$ του Θεωρήματος 24. □

Από τα προηγούμενα δύο θεωρήματα έχουμε ότι:

**Θεώρημα 36.** *Για κάθε $f(n) = \Omega(\log n)$ ισχύει ότι $PMSPACE(f(n)) = SNSPACE(nf(n))$.*

*Απόδειξη.* Προκύπτει απ' τα Θεωρήματα 34 και 35. □

Επομένως, λαμβάνοντας υπ' όψιν μαζί το Πόρισμα 7 και το Θεώρημα 36 παίρνουμε το ακόλουθο πόρισμα.

**Πόρισμα 8.** *Το χωρικό φράγμα $f(n) = \Theta(\log n)$ συμπεριφέρεται ως κατώφλι ως προς την υπολογιστική ισχύ του μοντέλου ΠΜ.*

Λαμβάνοντας υπ' όψιν την παραπάνω ανάλυση και το Πόρισμα 8 παρατηρούμε ότι το μοντέλο ΠΑΛΟΜΑ μοιάζει να αποτελεί τη χρυσή τομή μεταξύ ρεαλιστικών απαιτήσεων (σχετικών με την υλοποίηση) και της υπολογιστικής ισχύος που έχουμε τελικά διαθέσιμη.

**Θεώρημα 37** (Θεώρημα Χωρικής Ιεραρχίας του Μοντέλου ΠΜ). *Για οποιεσδήποτε δύο συναρτήσεις $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, όπου $f(n) = \Omega(\log n)$ και $g(n) = o(f(n))$, υπάρχει ένα κατηγόρημα $p$ που ανήκει στην $PMSPACE(f(n))$ αλλά όχι στην $PMSPACE(g(n))$.*

*Απόδειξη.* Απ' το Θεώρημα 33, για οποιεσδήποτε τέτοιες συναρτήσεις $f, g$, υπάρχει μία γλώσσα $L \in SNSPACE(nf(n))$ τ.ώ. $L \notin SNSPACE(ng(n))$. Απ' το Θεώρημα 36 έχουμε ότι $SNSPACE(nf(n)) = PMSPACE(f(n))$, επομένως $p_L \in PMSPACE(f(n))$ (όπου $p_L$ το συμμετρικό κατηγόρημα που αντιστοιχεί στη συμμετρική γλώσσα $L$). Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις. Αν $g(n) = \Omega(\log n)$ τότε απ' το Θεώρημα 36 έχουμε ότι $SNSPACE(ng(n)) = PMSPACE(g(n))$ και συνεπώς $L \notin PMSPACE(g(n))$ ή ισοδύναμα $p_L \notin PMSPACE(g(n))$. Αν $g(n) = o(\log n)$ τότε απ' το Πόρισμα 7 έχουμε ότι $PMSPACE(g(n)) \subsetneq SNSPACE(ng(n)) \subsetneq SNSPACE(nf(n)) = PMSPACE(f(n))$. □

### 5.2.1 Συμπεριφορά του Μοντέλου ΠΜ για Χώρο $o(\log \log n)$

Τώρα θα αποδείξουμε ότι $SEM = PMSPACE(f(n))$, όταν $f(n) = o(\log \log n)$. Καθώς ισχύει τετριμένα ότι $SEM \subseteq PMSPACE(f(n))$, θα ασχοληθούμε με την περίπτωση $PMSPACE(f(n)) \subseteq SEM$.

*Αποδεικτική Ιδέα.* Αρχικά ορίζουμε ένα γράφημα φάσεων πρακτόρων του οποίου οι κόμβοι είναι εσωτερικές φάσεις πρακτόρων. Το γράφημα αυτό εξαρτάται απ' το πρωτόκολλο $\mathcal{A}$ (που χρησιμοποιεί $o(\log \log n)$ μνήμη) και το μέγεθος του πληθυσμού $n$ και περιέχει όλες τις προσβάσιμες φάσεις στις οποίες η σημαία εργασίας είναι 0. Δύο τέτοιες φάσεις συνδέονται με ακμή $(u, v)$ αν υπάρχει αλληλεπίδραση με κάποια άλλη φάση $w$ μετά την οποία η $u$ θα γίνει $v$ (αφού εκτελέσει τον εσωτερικό υπολογισμό της). Επίσης, η $w$ αποτελεί το επίγραμμα της αντίστοιχης ακμής.

Εν συνεχεία αποδεικνύουμε ότι όσο μεγαλώνει το $n$, το γράφημα φάσεων μεταβάλλεται με τον εξής συστηματικό τρόπο: απλώς προστίθενται νέοι κόμβοι και ακμές, άρα συνεχίζει να έχει ένα κοινό υπογράφημα με μικρότερα $n$. Αυτό είναι πολύ λογικό, αφού αν στο νέο $n$ αγνοήσουμε κάποιους κόμβους, τότε οι υπόλοιποι θα συμπεριφέρονται ακριβώς όπως συμπεριφέρονταν και για μικρότερο $n$ (δηλαδή θα έχουν τις ίδιες ιδιότητες προσβασιμότητας).

Έπειτα συσχετίζουμε κάθε κόμβο $a$ του γραφήματος φάσεων με μία τιμή $r(a)$ η οποία ορίζεται ως το ελάχιστο άθροισμα τιμής κόμβου και επιγράμματος που δίνει την $a$. Δηλαδή για κάθε $u$ και $v$ τέτοια ώστε υπάρχει η ακμή $(u, a)$ και το επίγραμμά της είναι υ, ισχύει ότι $r(a) = \min(r(u) + r(v))$. Όλες οι αρχικές φάσεις παίρνουν τιμή 1. Διαισθητικά, οι κόμβοι που είναι προσβάσιμοι από αλληλεπίδραση αρχικών φάσεων παίρνουν τιμή 2, αυτοί που είναι προσβάσιμοι από μία αρχική και μία που είναι προσβάσιμη σε ένα βήμα παίρνουν τιμή 3 κ.ο.κ., άρα οι τιμές αυτές εκφράζουν απόσταση προσβασιμότητας.

Το επόμενο που αποδεικνύεται είναι ότι όλοι οι κόμβοι παίρνουν τιμή (αφού είναι προσβάσιμοι κόμβοι) και ότι (το πιο σημαντικό) για κάθε πρωτόκολλο $\mathcal{A}$ που χρησιμοποιεί $o(\log \log n)$ μνήμη, υπάρχει ένα $n_0$ τ.ώ., για κάθε $n > n_0$, η μέγιστη τιμή που εμφανίζεται στο γράφημα φάσεων είναι μικρότερη από $n/2$.

Μετά αποδεικνύουμε ότι κάθε φάση $a$ σε ένα γράφημα πράκτορα για πληθυσμό $n$, που είναι προσβάσιμη σε $r(a) - 1$ βήματα είναι προσβάσιμη και σε κάποιον πληθυσμό μεγέθους $r(a)$. Επαγωγικά μοιάζει πολύ λογικό: όλες οι αρχικές είναι προσβάσιμες σε 0 βήματα άρα μπορούν να εμφανιστούν και σε πληθυσμό μεγέθους 1 (απλώς ο μοναδικός πράκτορας παίρνει την κατάλληλο είσοδο), όσες είναι προσβάσιμες από δύο αρχικές (σε

1 βήμα) μπορούν να εμφανιστούν και σε πληθυσμό μεγέθους 2 αρκεί οι δύο πράκτορες να πάρουν τις κατάλληλες εισόδους κ.ο.κ.

Το επόμενο αποτέλεσμα που δίνουμε αποτελεί την καρδιά της απόδειξης: Αποδεικνύουμε ότι για κάθε πρωτόκολλο $\mathcal{A}$ που χρησιμοποιεί $o(\log\log n)$ μνήμη υπάρχει ένα $n_0$ τ.ώ. για κάθε $n > n_0$ το αντίστοιχο γράφημα φάσεων είναι κατά μία έννοια πλήρες, δηλαδή για οποιεσδήποτε δύο προσβάσιμες φάσεις, οι φάσεις αυτές μπορούν να είναι ταυτόχρονα προσβάσιμες και άρα να αλληλεπιδράσουν. Η ιδέα είναι η εξής: Έστω οποιεσδήποτε δύο τέτοιες προσβάσιμες φάσεις σε πληθυσμό $n$. Όπως είδαμε και οι δύο έχουν τιμή $r < n/2$. Αυτό σημαίνει (λόγω του προηγούμενου αποτελέσματος) ότι και οι δύο είναι προσβάσιμες σε πληθυσμό μεγέθους που είναι μικρότερο από $n/2$. Άρα, αν τον πληθυσμό $n$ τον θεωρήσουμε ως δύο πληθυσμούς μεγέθους $n/2$ ο καθένας οι οποίοι για πεπερασμένο αριθμό βημάτων δεν επικοινωνούν μεταξύ τους, στον ένα υποπληθυσμό μπορεί να εμφανιστεί η μία φάση και στον άλλο υποπληθυσμό η άλλη και τελικά να αλληλεπιδράσουν. Αυτό προφανώς δεν ισχύει για μνήμες μεγαλύτερες του $\log\log n$ γιατί εκεί δεν ισχύει αυτό το φράγμα $n/2$.

Τώρα η απόδειξη έχει σχεδόν ολοκληρωθεί. Την ολοκληρώνουμε δείχνοντας ότι, λόγω των προαναφερθέντων, υπάρχει κάποιο $n_0$ τ.ώ., για κάθε $n > n0$, το πλήθος των διαφορετικών φάσεων παύει να αυξάνει (τότε προφανώς αυτό το $n_0$ μπορεί να θεωρηθεί ως σταθερά και το $\mathcal{A}$ μπορεί να προσομοιωθεί και από πρωτόκολλο σταθερής μνήμης, άρα ό, τι υπολογίζει θα πρέπει να είναι ημιγραμμικό). Έστω ότι το πλήθος των φάσεων αύξανε για $n' > n$ και έστω $k$ μία καινούρια φάση για $n'$ (που δεν υπήρχε για $n$) και η οποία προκύπτει από μία αλληλεπίδραση φάσεων που υπήρχαν για $n$ (προφανώς μία νέα φάση πρέπει να προκύψει από προϋπάρχουσες λόγω του ότι το νέο γράφημα φάσεων απλώς προσθέτει νέους κόμβους). Από το προηγούμενο αποτέλεσμα οι δύο αυτές φάσεις θα μπορούσαν να συνυπάρξουν και άρα να αλληλεπιδράσουν και στον πληθυσμό $n$ και ως εκ τούτου η $k$ θα έπρεπε να ανήκει και στο γράφημα φάσεων του πληθυσμού $n$.

Άρα, δεν πρόκειται για καινούρια φάση, τέτοια καινούρια φάση δε μπορεί να υπάρξει και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Γενικά, έπειτα από κάθε αλληλεπίδραση, κάθε πράκτορας εκτελεί ένα σύνολο εσωτερικών πράξεων (έχοντας τη σημαία εργασίας στο 1), και τελικά καταλήγει σε μια κατάσταση στην οποία περιμένει να συμβεί κάποια αλληλεπίδραση (έχοντας τη σημαία εργασίας στο 0). Παρατηρήστε ότι αφού συμβεί αυτή η αλληλεπίδραση, η κατάσταση στην οποία θα μεταβεί τελικά ο πράκτορας, καθορίζεται αιτιοκρατικά από την κατάσταση που είχε πριν την αλληλεπίδραση και την κατάσταση του άλλου πράκτορα που συμμετείχε σε αυτήν.[1] Έτσι, για τις ανάγκες της απόδειξης αρκεί να θεωρήσουμε τις φάσεις πρακτόρων στις οποίες η σημαία εργασίας είναι 0, αγνοώντας τις ενδιάμεσες φάσεις από τις οποίες περνά ένας πράκτορας κατά τη διάρκεια του εσωτερικού υπολογισμού.

**Ορισμός 16.** *Έστω $\mathcal{A}$ ένα πρωτόκολλο ΠΜ που τρέχει σε έναν πληθυσμό $V$ μεγέθους $n$. Καλούμε* γράφημα φάσεων πράκτορα *το γράφημα $R_{\mathcal{A},V} = (U, W, F)$ τέτοιο ώστε:*

- *$U$ είναι το σύνολο των καταστάσεων (εσωτερικών φάσεων) που ορίζει το $A$ για τις οποίες η σημαία εργασίας είναι 0.*

- *$W$ είναι το σύνολο των ακμών $(u, v)$, όπου $u, v \in U$, ώστε όταν ένας πράκτορας βρεθεί στη φάση $u$, $v$ να είναι μια φάση στην οποία μπορεί να βρεθεί έπειτα από μια και μόνο αλληλεπίδραση.*

- *$F : W \to U \times \{i, r\}$ είναι το σύνολο επιγραμμάτων και ορίζεται ως $F(u, v) = (w, x)$ ανν ένας πράκτορας $k$ στη φάση $u$ αλληλεπιδρώντας με ένα πράκτορα στη φάση $w$ όπου ο τελευταίος έχει το ρόλο $x$ στην αλληλεπίδραση αυτή ($i$ εκφράζει το ρόλο του μυητή και $r$ του αποκρινόμενου), ο $k$ μεταβαίνει στη φάση $v$.*

Με άλλα λόγια, το σύνολο $U$ περιέχει τις φάσεις στις οποίες μπορεί να βρεθεί ένας πράκτορας αν δε λάβουμε υπ' όψιν αυτές που αντιστοιχούν σε εσωτερικό υπολογισμό,

[1]Προκύπτει άμεσα από το γεγονός ότι ο κάθε πράκτορας είναι μια αιτιοκρατική TM.

ενώ το $W$ ορίζει μεταβάσεις μεταξύ αυτών των φάσεων μέσω αλληλεπίδράσεων με τα επιγράμματα που ορίζει η $F$. Παρατηρήστε ότι στη γενική περίπτωση το $R_{\mathcal{A},V}$ εξαρτάται τόσο από το πρωτόκολλο $\mathcal{A}$, όσο και από το μέγεθος του πληθυσμού $n$. Γενικά ονομάζουμε κάποιο $u \in U$ ως *αρχικό κόμβο* αν αντιστοιχεί σε μια αρχική φάση πράκτορα.

Εξαιτίας της συνθήκης της ομοιομορφίας, ισχύει το ακόλουθο θεώρημα.

**Θεώρημα 38.** *Έστω $R_{\mathcal{A},V}$, $R_{\mathcal{A},V'}$ δύο γραφήματα φάσεων πράκτορα που αντιστοιχούν στο πρωτόκολλο $\mathcal{A}$ για δύο διαφορετικούς πληθυσμούς $V$, $V'$, με μεγέθη $n$ και $n'$ αντίστοιχα, και $n < n'$. Τότε, θα υπάρχει ένα υπογράφημα του $R_{\mathcal{A},V'}$, $R^*$ τέτοιο ώστε $R^* = R_{\mathcal{A},V}$ και το οποίο περιέχει όλες τις αρχικές καταστάσεις του $R_{\mathcal{A},V'}$.*

*Απόδειξη.* Πράγματι, αρκεί να διαμερίσουμε τον $V'$ σε δύο υποσύνολα $V_1'$, $V_2'$, ώστε $V_1' = V$ και εξετάζουμε το γράφημα φάσεων πράκτορα που προκύπτει καθώς το $\mathcal{A}$ τρέχει στο $V_1'$. Καθώς η συνθήκη της ομοιομορφίας επιβάλλει και στους δύο πληθυσμούς $V$, $V'$ να τρέχει το ίδιο πρωτόκολλο $\mathcal{A}$, το $R_{\mathcal{A},V}$ είναι ακριβώς ίδιο με το $R_{\mathcal{A},V_1'}$, και αφού οι αρχικές καταστάσεις είναι ίδιες και για τους δύο πληθυσμούς, θα περιέχονται στο $R_{\mathcal{A},V_1'}$. Επιπλέον, το $R_{\mathcal{A},V_1'}$ είναι υπογράφημα του $R_{\mathcal{A},V'}$, καθώς $V_1' \subset V'$, και η απόδειξη ολοκληρώνεται. □

Το παραπάνω θεώρημα ουσιαστικά δηλώνει ότι καθώς προχωράμε σε πληθυσμούς μεγαλύτερου μεγέθους, στα αντίστοιχα γραφήματα φάσεων πρακτόρων προστίθενται νέοι κόμβοι και ακμές, ενώ οι παλιοί διατηρούνται.

Δεδομένου ενός γραφήματος φάσεων πράκτορα, συσχετίζουμε κάθε κόμβο $a$ με μια τιμή $r(a)$ επαγωγικά ως ακολούθως:

**Βάση:** Για κάθε αρχικό κόμβο $a$, $r(a) = r_{init} = 1$.

**Επαγωγικό Βήμα:** Για κάθε άλλο κόμβο $a$, $r(a) = \min(r(b) + r(c))$ ώστε ο $a$ να είναι προσβάσιμος σε ένα βήμα από τον $b$ μέσω μιας ακμής με επίγραμμα $c$, και οι $b$, $c$ να έχουν ήδη συσχετισθεί με μια τιμή $r$.

**Λήμμα 15.** *Έστω $R_{A,V} = (U, W, F)$ ένα γράφημα φάσεων πράκτορα. Κάθε κόμβος του $R_{A,V}$ συσχετίζεται με μια τιμή $r$.*

*Απόδειξη.* Υποθέστε για τις ανάγκες του ατόπου ότι υπάρχει ένα μέγιστο, μη κενό σύνολο κόμβων $U' \subset U$ τέτοιο ώστε $\forall v \in U'$, ο κόμβος $v$ να μην έχει συσχετισθεί με κάποια τιμή $r$. Τότε τα $B = U - U'$ και $C = (B, U')$ ορίζουν μια τομή, και προφανώς κάθε αρχικός κόμβος βρίσκεται στο $B$. Εξετάζουμε μια τυχαία πλευρά $(u, v)$ με επίγραμμα $w$ η οποία διασχίζει την τομή, ώστε $u \in B$ και $v \in U'$, και ο $u$ έχει συσχετισθεί με μια τιμή $r(u)$. Καθώς ο $v$ δεν έχει συσχετισθεί με μια τιμή $r$, το ίδιο πρέπει να συμβαίνει και για τον κόμβο $w$. (διαφορετικά ο $v$ δε θα βρισκόταν στο $U'$. Έτσι, $w \in U'$ για κάθε τέτοια ακμή. Τώρα εξετάζουμε τον πρώτο πράκτορα $c$ που πηγαίνει σε μια φάση που αντιστοιχεί σε έναν κόμβο $v \in U'$. Εξαιτίας της παραπάνω παρατήρησης, αυτό θα μπορούσε να συμβεί μόνο μέσω μιας αλληλεπίδρασης με έναν πράκτορα που βρίσκεται ήδη στο $U'$, το οποίο δημιουργεί το άτοπο. □

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε ένα πάνω όριο στις τιμές $r$ όταν το αντίστοιχο πρωτόκολλο χρησιμοποιεί $f(n) = o(\log \log n)$ μνήμη.

**Λήμμα 16.** *Δηλώνουμε ως $r_{max-i}$ την $i-$στή μεγαλύτερη τιμή $r$ που συσχετίζεται με έναν κόμβο σε ένα γράφημα φάσεων πληθυσμού μεγέθους $n$. Για οποιοδήποτε πρωτόκολλο $A$ το οποίο εκτελείται χρησιμοποιώντας $f(n) = o(\log \log n)$ μνήμη, υπάρχει ένα $n_0$ τέτοιο ώστε για οποιονδήποτε πληθυσμό μεγέθους $n > n_0$, $r_{max} < \frac{n}{2}$.*

*Απόδειξη.* Καθώς $f(n) = o(\log \log n)$, $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{\log \log n} = 0$, άρα $\lim_{n\to\infty} \frac{\log \log n}{f(n)} = \infty$ και $\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{2^{f(n)}} = \infty$. Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι για οποιονδήποτε θετικό ακέραιο $M$ υπάρχει ένα σταθερό $n_0$ τέτοιο ώστε $\frac{\log n}{2^{f(n)}} > M$ για κάθε $n > n_0$.

Σταθεροποιούμε ένα οποιοδήποτε τέτοιο $n$ και έστω $k \leq 2^{f(n)}$ το σύνολο των κόμβων στο γράφημα φάσεων πράκτορα. Καθώς κάθε κόμβος έχει συσχετισθεί με μια τιμή $r$, μπορούν να υπάρχουν το πολύ $k$ διαφορετικές τέτοιες τιμές στο γράφημα. Παρατηρήστε ότι $r_{max} \leq 2 \cdot r_{max-1} \leq \cdots \leq 2^k \cdot r_{init} \leq 2^{2^{f(n)}} < 2^{\frac{\log n}{M}} \leq \sqrt[M]{n} \leq \frac{n}{2}$ για $n > max(n_0, 2)$ και $M \geq 2$, και η πρόταση αποδείχθηκε. □

**Λήμμα 17.** *Έστω $Q(a)$ η ακόλουθη ιδιότητα:* Δεδομένου ενός κόμβου $a$ σε ένα γράφημα φάσεων πράκτορα, $G = (V, E, F)$, υπάρχει ένας πληθυσμός μεγέθους $r(a)$ στον οποίο υπάρχει μια δίκαιη εκτέλεση που θα οδηγήσει κάποιον πράκτορα στη φάση $a$.

*Απόδειξη.* Η απόδειξη στηρίζεται σε γενικευμένη επαγωγή στις τιμές $r$.

**Βασική Υπόθεση:** Η $Q(a)$ ισχύει προφανώς για κάθε αρχικό κόμβο $u$, καθώς $r_{init} = 1$.

**Επαγωγικό Βήμα:** Εξετάζουμε έναν μη αρχικό κόμβο $u$ που έχει συσχετισθεί με μια τιμή $r(u) = r(a) + r(b)$ για κάποιους κόμβους $a$, $b$. Η επαγωγική υπόθεση υποθέτει ότι η $Q$ ισχύει για τους $a$ και $b$. Έτσι, ένας πληθυσμός μεγέθους $r(a) + r(b)$ είναι δυνατόν να οδηγήσει ανεξάρτητα δύο πράκτορες $x$, $y$ στις καταστάσεις $a$ και $b$ αντίστοιχα. Τότε, μια αλληλεπίδραση μεταξύ των $x$ και $y$ θα οδηγήσει τον έναν απ' αυτούς στην κατάσταση $u$, άρα η $Q(u)$ ισχύει.

□

Από τα Λήμματα 16 και 17 προκύπτει το ακόλουθο:

**Λήμμα 18.** *Για οποιοδήποτε πρωτόκολλο $\mathcal{A}$ το οποίο εκτελείται χρησιμοποιώντας $f(n) = o(\log \log n)$ μνήμη, υπάρχει ένα $n_0$ τέτοιο ώστε για οποιονδήποτε πληθυσμό μεγέθους $n > n_0$ και για οποιοδήποτε ζεύγος φάσεων πράκτορα $u, v$ στον πληθυσμό αυτό, είναι δυνατή η εμφάνιση της αλληλεπίδρασης $(u, v)$.*

*Απόδειξη.* Πράγματι, λόγω του Λήμματος 16, υπάρχει ένα $n_0$ ώστε για κάθε $n > n_0$ η τιμή $r$ κάθε κόμβου είναι μικρότερη από $\frac{n}{2}$. Έτσι, από το Λήμμα 17 προκύπτει ότι σε κάθε τέτοιο πληθυσμό είναι δυνατόν να εμφανιστεί μια αλληλεπίδραση $(u, v)$ μεταξύ οποιονδήποτε φάσεων πρακτόρων $u$, $v$, αφού καθεμιά εξ' αυτών μπορεί να προκύψει ανεξάρτητα από την άλλη. □

**Θεώρημα 39.** *Οποιοδήποτε πρωτόκολλο ΠΜ $\mathcal{A}$ εκτελείται χρησιμοποιώντας χώρο $f(n) = o(\log \log n)$ θα υπολογίζει αναγκαστικά μόνο ημιγραμμικά κατηγορήματα.*

*Απόδειξη.* Λόγω της συνθήκης της ομοιομορφίας, το $\mathcal{A}$ εκτελείται σε πληθυσμό οποιουδηποτε μεγέθους. Επιλέγουμε ένα $n_0$ που προβλέπεται από το Λήμμα 16 και σταθεροποιούμε ένα οποιοδήποτε $n > n_0$ με $L$ τον αντίστοιχο πληθυσμό. Έστω $R_{\mathcal{A},L}$ το αντίστοιχο γράφημα φάσεων πράκτορα. Εξετάζουμε έναν οποιονδήποτε πληθυσμό $L'$ με $n' > n$ και έστω $R_{\mathcal{A},L'}$ το αντίστοιχο γράφημα φάσεων πράκτορα. Λόγω του Θεωρήματος 38, το $R_{\mathcal{A},L'}$ περιέχει ένα υπογράφημα $K$, το οποίο είναι ίδιο με το $R_{\mathcal{A},L}$ και οι αρχικοί κόμβοι του $R_{\mathcal{A},L'}$ βρίσκονται στο $K$. Έστω $U^* = U' - U$, και $k$ η πρώτη φάση πράκτορα που εμφανίζεται στον πληθυσμό, ώστε $k \in U^*$, μέσω μιας αλληλεπίδρασης $(u, v)$. Τότε, $u, v \in U$ και η $(u, v)$ εμφανίζεται και στον πληθυσμό $L$, οδηγώντας αναγκαστικά στην $k \in U$, το οποίο έρχεται σε αντίθεση με την επιλογή της $k$ δημιουργώντας άτοπο. Έτσι, το σύνολο $U^*$ είναι κενό, και το σύνολο των δυνατών φάσεων που ορίζει το $\mathcal{A}$ δεν μεταβάλλεται καθώς μετακινούμαστε σε μεγαλύτερους πληθυσμούς. Αφού λοιπόν είναι σταθερό, το αντίστοιχο κατηγόρημα είναι δυνατόν να υπολογιστεί από το βασικό μοντέλο ΠΠ, και άρα είναι ημιγραμμικό. □

Το παραπάνω θεώρημα πρακτικά εγγυάται ότι για οποιοδήποτε πρωτόκολλο χρησιμοποιεί μνήμη $f(n) = o(\log \log n)$ σε κάθε πράκτορα, θα υπάρχει ένας πληθυσμός μεγέθους $n_0$, ώστε για πληθυσμούς μεγαλύτερους από $n_0$ δε χρησιμοποιεί επιπλέον μνήμη. Καθώς αυτό το $n_0$ είναι σταθερό, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα πρωτόκολλο στηριζόμενοι στο γράφημα φάσεων πράκτορα το οποίο χρησιμοποιεί σταθερή μνήμη [2], και άρα είναι εφαρμόσιμο στο βασικό μοντέλο ΠΠ.

### 5.2.2 Το κατηγόρημα του λογαρίθμου

Στην παρούσα ενότητα θα παρουσιάσουμε το μη ημιγραμμικό κατηγόρημα του λογαρίθμου, και θα δείξουμε πως είναι δυνατόν να υπολογισθεί από ένα ΠΜ πρωτόκολλο που χρησιμοποιεί $\mathcal{O}(\log\log n)$ μνήμη σε κάθε πράκτορα. Παρατηρήστε ότι συνδυάζοντας το αποτέλεσμα αυτό με αυτό που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη ενότητα, δείχνουμε ότι το $\log\log n$ είναι ένα αυστηρό όριο στην ημιγραμμική συμπεριφορά του μοντέλου.

Το κατηγόρημα του λογαρίθμου ορίζεται ως ακολούθως: Κατά την αρχικοποίηση, κάθε πράκτορας λαμβάνει ένα σύμβολο εισόδου από το σύνολο $X = \{a, 0\}$, και έστω $N_a$ ο αριθμός των πρακτόρων που έχουν λάβει ως είσοδο το $a$. Καλούμαστε να υπολογίσουμε αν ισχύει ότι $\log N_a = t$, για κάποιο $t$. Στη συνέχεια δίνουμε μια υψηλού επιπέδου περιγραφή ενός πρωτοκόλλου που υπολογίζει το κατηγόρημα του λογαρίθμου.

Κάθε πράκτορας $u$ διατηρεί μια μεταβλητή $x_u$, και έστω $out$ η μεταβλητή στην οποία γράφει την έξοδό του. Αρχικά, κάθε πράκτορας $u$ που λαμβάνει ως είσοδο το σύμβολο $a$, θέτει $x_u = 1$ και $out = 1$, ενώ οι υπόλοιποι θέτουν $x_v = 0$ και $out = 1$.

Το βασικό πρωτόκολλο αποτελείται από δύο επιμέρους, έστω $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, τα οποία εκτελούνται παράλληλα. Το πρώτο φροντίζει ώστε κάθε φορά που πραγματοποιείται μια αλληλεπίδραση μεταξύ δύο πρακτόρων $u, v$, με $u$ στο ρόλο του μυητή, αν $x_u = x_v > 0$, τότε $x_u = x_u + 1$ και $x_v = 0$, ενώ σε κάθε άλλη περίπτωση δε συμβαίνει τίποτα. Το δεύτερο πρωτόκολλο δρα παράλληλα με το πρώτο, και υπολογίζει το ημιγραμμικό κατηγόρημα που απαντά στο ερώτημα αν υπάρχουν τουλάχιστον δύο πράκτορες που έχουν $x_u > 0$. Αν ναι, τότε η έξοδος του πληθυσμού είναι 0, διαφορετικά είναι 1. Παρατηρή-

[2]Στην πράξη, το γράφημα φάσεων πράκτορα μπορεί να θεωρηθεί ως ένα πεπερασμένο αυτόματο από μόνο του.

στε ότι το δεύτερο πρωτόκολλο τρέχει σε *σταθεροποιούμενες εισόδους*, καθώς οι τιμές $x$ μεταβάλλονται πολλές φορές προτού σταθεροποιηθούν. Ωστόσο, γνωρίζουμε ότι τα ημιγραμμικά κατηγορήματα είναι υπολογίσιμα και σε αυτή την περίπτωση [8] (παρόμοια φιλοσοφία με το Πρωτόκολλο 1 της Ενότητας 2.3.1).

**Λήμμα 19.** *Το παραπάνω πρωτόκολλο χρησιμοποιεί* $\mathcal{O}(\log\log n)$ *μνήμη.*

*Απόδειξη.* Καθώς το πρωτόκολλο $\mathcal{B}$ υπολογίζει ένα ημιγραμμικό κατηγόρημα, χρησιμοποιεί $\mathcal{O}(c)$ μνήμη, με $c$ σταθερά. Για τυχαίο πράκτορα $u$, εξετάζουμε τη μέγιστη τιμή που μπορεί να λάβει η μεταβλητή $x_u$ (που είναι και η μοναδική που χρησιμοποιεί το πρωτόκολλο $\mathcal{A}$). Παρατηρήστε ότι για να φτάσει την τιμή $k$, χρειάζεται να υπάρχουν πιο πριν στον πληθυσμό τουλάχιστον 2 μεταβλητές $x$ στην τιμή $k-1$. Μέσω επαγωγής, προκύπτει ότι χρειάζεται να υπάρχουν τουλάχιστον $2^k$ μεταβλητές που βρίσκονται στην τιμή 1. Καθώς $2^k \leq N_a$, $k \leq \log N_a \leq \log n$, προκύπτει ότι η $x_u$ έχει μέγιστη τιμή την $\log n$ και άρα απαιτεί $\mathcal{O}(\log\log n)$ μνήμη. □

**Λήμμα 20.** *Η έξοδος του παραπάνω πρωτοκόλλου σταθεροποιείται στο* 1 *αν* $\log N_a = t$ *για κάποιο* $t$*, διαφορετικά σταθεροποιείται στο* 0.

*Απόδειξη.* Πράγματι, λόγω του πρωτοκόλλου $B$, οι πράκτορες σταθεροποιούν την έξοδό τους στο 1 ανν τελικά υπάρχει μόνο ένας πράκτορας $u$ με μη μηδενική τιμή $x_u$. Έστω $x_u = k$. Τότε, λόγω της παραπάνω ανάλυσης, κατά την εκκίνηση του υπολογισμού θα υπάρχουν $2^k$ μεταβλητές που βρίσκονται στην τιμή 1, και αφού οι αντίστοιχοι πράκτορες (και μόνο) θα έχουν λάβει ως είσοδο το σύμβολο $a$, θα ισχύει $N_a = 2^k \Rightarrow \log N_a = k$. Αντίθετα, λόγω των όσων αναφέραμε, αν δεν υπάρχει $k$ ώστε $\log N_a = k$, θα υπάρχουν τουλάχιστον δύο πράκτορες με μη μηδενικές μεταβλητές $x$, και το πρωτόκολλο $\mathcal{B}$ θα οδηγήσει όλους τους πράκτορες στην τιμή εξόδου 0. □

Έτσι, δώσαμε ένα μη ημιγραμμικό κατηγόρημα που είναι υπολογίσιμο από ένα πρωτόκολλο ΠΜ το οποίο χρησιμοποιεί $\mathcal{O}(\log\log n)$ χώρο. Συνδυάζοντας τα αποτελέσματα αυτής της υποενότητας με αυτά της προηγούμενης, μπορούμε να καταλήξουμε στο ακόλουθο θεώρημα:

**Θεώρημα 40.** $SEM = PMSPACE(f(n))$ *όταν* $f(n) = o(\log \log n)$ *και επιπλέον* $SEM \subsetneq PMSPACE(f(n))$ *όταν* $f(n) = \mathcal{O}(\log \log n)$.

# Κεφάλαιο 6

# Συμπεράσματα - Μελλοντικές Κατευθύνσεις

## 6.1 Συμπεράσματα

Στην εργασία αυτή ασχοληθήκαμε με μοντέλα για δίκτυα παθητικά κινούμενων αισθητήρων. Συγκεκριμένα, επεκτείναμε το μοντέλο των Πρωτοκόλλων Πληθυσμών και προτείναμε δύο νέα μοντέλα: το μοντέλο των Πρωτοκόλλων Πληθυσμών με Διαμεσολαβητή και το μοντέλο των Παθητικά κινούμενων Μηχανών. Τα νέα μοντέλα χαρακτηρίζονται από ρεαλιστικές και υλοποιήσιμες επιπλέον υποθέσεις. Στο μεν μοντέλο ΠΠΔ η επιπλέον υπόθεση είναι η δυνατότητα αποθήκευσης πληροφορίας στις ακμές του γραφήματος επικοινωνίας ενώ στο δε μοντέλο ΠΜ η επιπλέον υπόθεση είναι ότι οι πράκτορες δεν είναι πια μηχανές πεπερασμένων καταστάσεων με σταθερή μνήμη αλλά πολυταινιακές μηχανές Turing των οποίων η μνήμη καθορίζεται ανάλογα με τις ανάγκες του υπολογισμού.

Σε ό,τι αφορά στο μοντέλο ΠΠΔ, αρχικά επικεντρωθήκαμε σε πλήρη γραφήματα επικοινωνίας στα οποία και μελετήσαμε την υπολογιστική ισχύ του μοντέλου. Καταφέραμε να δείξουμε ότι το μοντέλο μπορεί να προσομοιώσει μία ανταιτιοκρατική μηχανή Turing χώρου $\mathcal{O}(n^2)$ που διαγιγνώσκει συμμετρικές γλώσσες. Για να το επιτύχουμε αυτό χρειάστηκε να δείξουμε ότι όλοι οι πράκτορες μπορούν να διαταχθούν σε μία ευθεία γραμμή αποτελούμενη από ενεργές ακμές. Ύστερα οι πράκτορες επανεκκινούν την προσομοίωση, όλοι τους αναλαμβάνουν το ρόλο της κεφαλής της προσομοιούμενης μηχανής και χρησιμοποιούν ως κελιά ανάγνωσης και εγγραφής τις υπόλοιπες $\mathcal{O}(n^2)$ ανενεργές ακμές. Για να εκτελέσουν ανταιτιοκρατική προσομοίωση, οι πράκτορες αντλούν την ανταιτιοκρατία απ' την εγγενή ανταιτιοκρατία του προτύπου αλληλεπιδράσεων. Αφού δε μπορούν να διασπάσουν τους εαυτούς τους σε πολλαπλά αντίγραφα όπως επιτάσσει ο ανταιτιοκρατικός υπολογισμός, αντ' αυτού εκτελούν ανταιτιοκρατικές αναζητήσεις στο δέντρο υπολογισμού της TM. Η έξοδός τους είναι ''απόρριψη'' μέχρις ότου να βρεθεί κάποιος αποδεκτικός κλάδος. Τότε η έξοδός τους γίνεται ''αποδοχή'' και δε μεταβάλλεται ξανά. Αποδεικνύοντας και ότι η αντίστροφη προσομοίωση είναι εφικτή (η μηχανή προσομοιώνει το πρωτόκολλο) συμπεράναμε ότι η κλάση $MPS$ των υπολογίσιμων κατηγορημάτων είναι ακριβώς η κλάση των συμμετρικών κατηγορημάτων της $NSPACE(n^2)$. Άρα, το μοντέλο ΠΠΔ αποτελεί ένα πραγματικά πανίσχυρο μοντέλο. Επιπρόσθετα, μελετήσαμε τις ιδιότητες γραφημάτων που μπορεί να υπολογίσει το μοντέλο. Δείξαμε ότι σε μη συνεκτικά γραφήματα δε μπορεί να υπολογιστεί καμία ιδιότητα. Λόγω αυτού, επικεντρωθήκαμε σε συνεκτικά γραφήματα και αποδείξαμε τη διαγνωσιμότητα αρκετών ενδιαφέροντων γλωσσών γραφημάτων.

Σε ό, τι αφορά στο μοντέλο ΠΜ, επικεντρωθήκαμε και πάλι σε πλήρη γραφήματα επικοινωνίας προσπαθώντας και εδώ να κατανοήσουμε την υπολογιστική του ισχύ. Στο μοντέλο αυτό, η υπολογιστική ισχύς έδειχνε εξαρχής να εξαρτάται από τη μνήμη που έχουν διαθέσιμη τα πρωτόκολλα. Δείξαμε από την αρχή ιδιαίτερο ενδιαφέρον για την περίπτωση κατά την οποία η χρησιμοποιούμενη μνήμη στους πράκτορες δεν ξεπερνάει ασυμπτωτικά ένα λογάριθμο του μεγέθους του πληθυσμού. Ο λόγος που έστρεψε εκεί την προσοχή μας ήταν ότι τόση μνήμη είναι όση χρειάζονται οι πράκτορες για να μπορούν να αποθηκεύσουν μοναδικούς προσδιοριστές και ότι ο λογάριθμος εξασφαλίζει ρεαλιστικά μεγέθη μνήμης (επαρκώς μικρά για τις δυνατότητες τις υπάρχουσας τεχνολογίας). Καταφέραμε να δώσουμε έναν ακριβή χαρακτηρισμό της κλάσης $PLM$, των υπολογίσιμων κατηγορημάτων σε αυτή την περίπτωση: Η $PLM$ είναι ακριβώς η κλάση των συμμετρικών κατηγορημάτων της $NSPACE(n \log n)$. Αυτό δείχνει ότι πρόκειται για ένα εξίσου ισχυρό μοντέλο με το μοντέλο ΠΠΔ αφού και αυτό χρησιμοποιεί ασυμπτωτικά όλη τη διαθέσιμη μνήμη του ως μία κατανεμημένη ανταιτιοκρατική μηχανή Turing. Για να φτάσουμε σε αυτό το αποτέλεσμα δείξαμε ότι οι πράκτορες επανεκκινώντας και εδώ τον υπολογισμό τους μπορούν να αναθέσουν στους εαυτούς τους μοναδικούς προσδιοριστές και να μάθουν το μέγεθος του πληθυσμού. Αυτά είναι όλα όσα χρειάζονται για να οργανωθούν και εδώ σε μία μηχανή Turing.

Έπειτα, συνεχίζοντας τη μελέτη του μοντέλου ΠΜ, προσπαθήσαμε να δούμε τι ακριβώς συμβαίνει καθώς μεταβάλλεται η μνήμη που είναι διαθέσιμη στα πρωτόκολλα. Εδώ προέκυψαν και τα πιο ενδιαφέροντα συμπεράσματά μας με τεράστιες εφαρμογές, αφού ένα απ' τα πιο κρίσιμα ερωτήματα σε κάθε υπολογιστικό σύστημα είναι πόσος χώρος χρειάζεται για κάθε δοθέν πρόβλημα (ή πόσος χρόνος, αλλά εδώ δεν ασχοληθήκαμε με την έννοια του χρόνου). Συγκεκριμένα, δείξαμε αρχικά ότι αν η διαθέσιμη μνήμη είναι το πολύ $f(n)$, όπου $f(n)$ είναι τουλάχιστον $\log n$, τότε η αντίστοιχη κλάση είναι ίση με την κλαση των συμμετρικών κατηγορημάτων της $NSPACE(nf(n))$. Επειδή ισχύει η χωρική ιεραρχία για την συμμετρική υποκλάση της $NSPACE(nf(n))$, συμπεράναμε ότι υπάρχει χωρική ιεραρχία και για το μοντέλο ΠΜ. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι, γι' αυτές τις $f(n)$, όσο η $f(n)$ μεγαλώνει τόσο αυξάνουν και οι υπολογιστικές δυνατότητες του μοντέλου. Η παρατήρηση τις αδυναμίας ανάθεσης μοναδικών προσδιοριστών για $f(n)$ αυστηρά μικρότερη του $\log n$ (λόγω του ότι ο μεγαλύτερος προσδιοριστής δε θα χωράει στη μνήμη κανενός πράκτορα) μας έκανε να υποψιαστούμε ότι η παραπάνω συμπεριφορά αυξανόμενης υπολογιστικής ισχύος δε θα ισχύει γι' αυτά τα χωρικά φράγματα. Πράγματι, χρησιμοποιώντας έναν εναλλακτικό τρόπο αναπαράστασης των φάσεων (όπου η διάταξη χάνει το νόημά της) δείξαμε καλύτερα άνω φράγματα γι' αυτές τις $f(n)$, καταλήγοντας στο ότι οι κλάσεις εδώ είναι αυστηρά μικρότερες από $NSPACE(nf(n))$ και άρα το $\log n$ συμπεριφέται ως κατώφλι σχετικά με την υπολογιστική ισχύ. Αυτό το αποτέλεσμα προσδίδει εξέχουσα σημασία στο φράγμα $\log n$, αφού αποτελεί ένα χωρικό σημείο πέρα απ' το οποίο οι υπολογιστικές δυνατότητες του μοντέλου αυξάνουν αυστηρά. Τέλος, δείξαμε ότι για $f(n)$ αυστηρά μικρότερη του $\log\log n$ όλα τα υπολογίσιμα κατηγορήματα είναι ημιγραμμικά, δηλαδή το μοντέλο ΠΜ γι' αυτά τα χωρικά φράγματα είναι ισοδύναμο με το μοντέλο ΠΠ, και ότι για $f(n)$ τουλάχιστον $\log\log n$ το μοντέλο υπολογίζει ένα μη ημιγραμμικό κατηγόρημα, επομένως και το $\log\log n$ εμφανίζει συμπεριφορά κατωφλίου.

## 6.2 Μελλοντικές Κατευθύνσεις

Πολλά ενδιαφέροντα προβλήματα παραμένουν ανοικτά στο ταχύτατα αναπτυσσόμενο πεδίο των πρωτοκόλλων πληθυσμών. Είναι τα μοντέλα ΠΠΔ και ΠΜ ανεκτικά σε βλάβες; Τι προϋποθέσεις απαιτούνται ούτως ώστε να επιτύχουμε ικανοποιητική ανοχή σε βλάβες; Ποιοι είναι οι ακριβείς χαρακτηρισμοί των κλάσεων των σταθερά διαγνώσιμων γλωσσών γραφημάτων από τα μοντέλα αυτά; Ποια είναι η κλάση των σταθερά διαγνώσιμων γλωσσών γραφημάτων από την παραλλαγή του μοντέλου ΠΠΔΔΓ στην οποία το γράφημα επικοινωνίας είναι πάντα πλήρες και η συνάρτηση αρχικοποίησης ακμών καθορίζει το ποιες ακμές αποτελούν το υπογράφημα του οποίου η συμμετοχή στη γλώσσα πρέπει να ελεγχθεί (π.χ. η συνάρτηση σημαδεύει με 1 τις ακμές που αποτελούν το υπογράφημα και με 0 τις υπόλοιπες); Τι μπορούν να υπολογίσουν τα νέα μοντέλα αν λειτουργήσουν με σταθεροποιούμενες εισόδους; Ποια είναι τα πιο κατάλληλα σενάρια του πραγματικού κόσμου για την πρακτική εφαρμογή του μοντέλου ΠΠΔ; Ποια είναι η υπολογιστική ισχύς του μοντέλου ΠΜ για χωρικά φράγματα $f(n)$ μεταξύ $\log\log n$ και $\log n$. Όπως είδαμε, αυτό που γνωρίζουμε γι' αυτό το χωρικό πλαίσιο είναι ότι πάνω απ' το $\log\log n$ παύει η ημιγραμμική συμπεριφορά και ότι κάτω απ' το $\log n$ παύει η συμπεριφορά $nf(n)$. Η [17] αποκάλυψε την ανάγκη για *προσαρμοστικότητα* των πρωτοκόλλων όταν συμβαίνουν φυσικές μεταβολές στο πρότυπο κίνησης ούτως ώστε τα πρωτόκολλα να συνεχίζουν να δουλεύουν σωστά και/ή εξίσου γρήγορα. Ωστόσο, δε γνωρίζουμε ακόμα ούτε πώς ακριβώς να ορίσουμε ούτε πώς να επιτύχουμε την προσαρμοστικότητα. Επίσης, για κανένα από τα νέα μοντέλα που προτάθηκαν σε αυτή την εργασία ούτε για το μοντέλο ΠΚ δεν έχει ακόμα μελετηθεί η χρονική πολυπλοκότητα πρωτοκόλλων βάσει κάποιας πιθανοτικής υπόθεσης λειτουργίας του δρομολογητή. Αντίθετα, η μελέτη αυτή έχει πραγματοποιηθεί σε κάποιο βαθμό για τα πρωτόκολλα πληθυσμών [6, 7, 9, 10] και ορισμένες από τις μεθόδους που έχουν ήδη αναπτυχθεί αναμένεται να βρίσκουν εφαρμογή και στα νέα μοντέλα. Υπάρχουν πιο αποδοτικές, πιθανόν βασιζόμενες στη λογική, μέθοδοι επαλήθευσης για πρωτόκολλα πληθυσμών από αυτές που προτάθηκαν στην [25]; Ακόμα δε γνωρίζουμε καμία μέθοδο επαλήθευσης για ΠΠΔ, ΠΚ και πρωτόκολλα ΠΜ. Βέβαια, ορισμένες απ' τις ιδέες της [25] μπορεί να εφαρμόζονται επίσης και σε αυτά τα μοντέλα. Τέλος, ποια είναι η υπολογιστική ισχύς της παραλλαγής του μοντέλου ΠΠ στην οποία οι πράκτορες αλληλεπιδρούν κατά ομάδες των $k > 2$ πρακτόρων και όχι κατά ζεύγη;

# Βιβλιογραφία


[1] I. F. Akyildiz, W. Su, Y. Sankarasubramaniam, and E. Cayirci. Wireless sensor networks: a survey. *Computer Networks*, 38:393–422, 2002.

[2] Carme Àlvarez, Ioannis Chatzigiannakis, Amalia Duch, Joaquim Gabarró, Othon Michail, Serna Maria, and Paul G. Spirakis. Computational models for networks of tiny artifacts: A survey. *Computer Science Review*, 2010. To appear.

[3] Carme Àlvarez, Amalia Duch, Joaquim Gabarro, and Maria Serna. Sensor field: A computational model. In *Algorithmic Aspects of Wireless Sensor Networks: 5th International Workshop, ALGOSENSORS 2009, Rhodes, Greece, July 10-11, 2009. Revised Selected Papers*, pages 3–14, Berlin, Heidelberg, 2009. Springer-Verlag.

[4] Carme Àlvarez, Maria Serna, and Paul G. Spirakis. On the computational power of constant memory sensor fields. Technical Report FRONTS-TR-2010-10, 2010.

[5] Dana Angluin, James Aspnes, Melody Chan, Michael J. Fischer, Hong Jiang, and René Peralta. Stably computable properties of network graphs. In Viktor K. Prasanna, Sitharama Iyengar, Paul Spirakis, and Matt Welsh, editors, *Distributed Computing in Sensor Systems: First IEEE International Conference, DCOSS 2005, Marina del Rey, CA, USE, June/July, 2005, Proceedings*, volume 3560 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 63–74. Springer-Verlag, June 2005.

[6] Dana Angluin, James Aspnes, Zoë Diamadi, Michael J. Fischer, and René Peralta. Computation in networks of passively mobile finite-state sensors. In *PODC '04: Proceedings of the twenty-third annual ACM symposium on Principles of distributed computing*, pages 290–299, New York, NY, USA, 2004. ACM.

[7] Dana Angluin, James Aspnes, Zoë Diamadi, Michael J. Fischer, and René Peralta. Computation in networks of passively mobile finite-state sensors. *Distributed Computing*, pages 235–253, mar 2006.

[8] Dana Angluin, James Aspnes, and David Eisenstat. Stably computable predicates are semilinear. In *PODC '06: Proceedings of the 25th annual ACM Symposium on Principles of Distributed Computing*, pages 292–299, New York, NY, USA, 2006. ACM Press.

[9] Dana Angluin, James Aspnes, and David Eisenstat. Fast computation by population protocols with a leader. *Distributed Computing*, 21(3):183–199, September 2008.

[10] Dana Angluin, James Aspnes, and David Eisenstat. A simple population protocol for fast robust approximate majority. *Distributed Computing*, 21(2):87–102, July 2008.

[11] Dana Angluin, James Aspnes, David Eisenstat, and Eric Ruppert. The computational power of population protocols. *Distributed Computing*, 20(4):279–304, nov 2007.

[12] James Aspnes and Eric Ruppert. An introduction to population protocols. *Bulletin of the European Association for Theoretical Computer Science*, 93:98–117, October 2007.

[13] Joffroy Beauquier, Julien Clement, Stephane Messika, Laurent Rosaz, and Brigitte Rozoy. Self-stabilizing counting in mobile sensor networks. In *PODC '07: Proceedings of the twenty-sixth annual ACM symposium on Principles of distributed computing*, pages 396–397, New York, NY, USA, 2007. ACM.

[14] Béla Bollobás. *Modern Graph Theory.* Springer, corrected edition, July 1998.

[15] Olivier Bournez, Jérémie Chalopin, Johanne Cohen, and Xavier Koegler. Playing with population protocols. In *CSP*, pages 3–15, 2008.

[16] Olivier Bournez, Philippe Chassaing, Johanne Cohen, Lucas Gerin, and Xavier Koegler. On the convergence of population protocols when population goes to infinity. *Applied Mathematics and Computation*, 2009. To appear.

[17] Ioannis Chatzigiannakis, Shlomi Dolev, Sándor P. Fekete, Othon Michail, and Paul G. Spirakis. Not all fair probabilistic schedulers are equivalent. In *OPODIS '09: Proceedings of the 13th International Conference on Principles of Distributed Systems*, pages 33–47, Berlin, Heidelberg, 2009. Springer-Verlag.

[18] Ioannis Chatzigiannakis, Othon Michail, Stavros Nikolaou, Andreas Pavlogiannis, and Paul G. Spirakis. All symmetric predicates in $NSPACE(n^2)$ are stably computable by the mediated population protocol model. In *MFCS '10: Proceedings of the 35th International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science 2010*, 2010. To appear.

[19] Ioannis Chatzigiannakis, Othon Michail, Stavros Nikolaou, Andreas Pavlogiannis, and Paul G. Spirakis. Computing with populations of passively mobile devices: The effect of local memory. Technical Report FRONTS-TR-2010, RACTI, Patras, Greece, June 2010.

[20] Ioannis Chatzigiannakis, Othon Michail, Stavros Nikolaou, Andreas Pavlogiannis, and Paul G. Spirakis. Passively mobile communicating logarithmic space machines. Technical Report FRONTS-TR-2010-16, RACTI, Patras, Greece, 2010. `http://fronts.cti.gr/aigaion/?TR=154`, `arXiv/1004.3395v1`.

[21] Ioannis Chatzigiannakis, Othon Michail, and Paul G. Spirakis. Brief announcement: Decidable graph languages by mediated population protocols. In *DISC*, pages 239–240, 2009.

[22] Ioannis Chatzigiannakis, Othon Michail, and Paul G. Spirakis. Exploring the computational limits of adaptive networked populations of tiny artefacts. In *Future and Emerging Technologies (FET)*, apr. 2009.

[23] Ioannis Chatzigiannakis, Othon Michail, and Paul G. Spirakis. Mediated population protocols. In *36th International Colloquium on Automata, Languages and Programming (ICALP 2009)*, volume 5556 of *LNCS*, pages 363–374, July 2009.

[24] Ioannis Chatzigiannakis, Othon Michail, and Paul G. Spirakis. Recent advances in population protocols. In *MFCS '09: Proceedings of the 34th International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science 2009*, pages 56–76, Berlin, Heidelberg, 2009. Springer-Verlag.

[25] Ioannis Chatzigiannakis, Othon Michail, and Paul G. Spirakis. Algorithmic verification of population protocols. In *12th International Symposium on Stabilization, Safety, and Security of Distributed Systems (SSS 2010)*, LNCS, September 2010. To appear.

[26] Ioannis Chatzigiannakis, Othon Michail, and Paul G. Spirakis. Population protocols and related models. In S. Nikoletseas and J. Rolim, editors, *Theoretical Aspects of Distributed Computing in Sensor Networks*. Springer-Verlag, 2010. To appear.

[27] Ioannis Chatzigiannakis, Othon Michail, and Paul G. Spirakis. Stably decidable graph languages by mediated population protocols. In *12th International Symposium on Stabilization, Safety, and Security of Distributed Systems (SSS 2010)*, LNCS, September 2010. To appear.

[28] Ioannis Chatzigiannakis and Paul G. Spirakis. The dynamics of probabilistic population protocols. In *DISC '08: Proceedings of the 22nd international symposium on Distributed Computing*, pages 498–499, Berlin, Heidelberg, 2008. Springer-Verlag.

[29] Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, and Clifford Stein. *Introduction to Algorithms, Second Edition.* The MIT Press and McGraw-Hill Book Company, 2001.

[30] Carole Delporte-Gallet, Hugues Fauconnier, Rachid Guerraoui, and Eric Ruppert. When birds die: Making population protocols fault-tolerant. In *DCOSS*, pages 51–66, 2006.

[31] Z. Diamadi and M. J. Fischer. A simple game for the study of trust in distributed systems. *Wuhan University Journal of Natural Sciences*, 6(1–2):72–82, 2001. Also appears as Yale Technical Report TR-1207.

[32] Apostolos Filippas, Stavros Nikolaou, Andreas Pavlogiannis, Othon Michail, Ioannis Chatzigiannakis, and Paul G. Spirakis. Computational models for wireless sensor networks: A survey. In *1st International Conference for Undergraduate and Postgraduate Students in Computer Engineering, Informatics, related Technologies and Applications (EUREKA!)*, 2010. To appear. Also FRONTS Technical Report, FRONTS-TR-2010-18, `http://fronts.cti.gr/aigaion/?TR=156`.

[33] Viliam Geffert. Space hierarchy theorem revised. *Theor. Comput. Sci.*, 295:171–187, 2003.

[34] S. Ginsburg and E. H. Spanier. Semigroups, presburger formulas, and languages. *Pacific Journal of Mathematics*, 16:285–296, 1966.

[35] Όθων Σ. Μιχαήλ. *Πρωτόκολλα Πληθυσμών*. ΤΜΗΥΠ, Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Επιστήμης & Τεχνολογίας Υπολογιστών, Πανεπιστήμιο Πατρών, 2009. Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία.

[36] Γ. Φ. Γεωργακόπουλος. *Εισαγωγή στη θεωρία υπολογισμού*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2007. Μετάφραση στα Ελληνικά του "*Introduction to the theory of computation* " του M. Sipser [52].

[37] Κ. Μπους, Δ. Γραμμένος, Θ. Φειδάς, and Α. Λαυρέντζος. *Στοιχεία Διακριτών Μαθηματικών*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2007. Μετάφραση στα Ελληνικά του "*Elements of Discrete Mathematics* " του C. L. Liu [42].

[38] Λ. Κυρούσης, Χ. Μπούρας, and Π. Σπυράκης. *Διακριτά Μαθηματικά: Τα μαθηματικά της επιστήμης των υπολογιστών*. Gutenberg , 1994.

[39] Rachid Guerraoui and Eric Ruppert. Names trump malice: Tiny mobile agents can tolerate byzantine failures. In *36th International Colloquium on Automata, Languages and Programming (ICALP 2009)*, volume 5556 of *LNCS*, pages 484–495, July 2009.

[40] Neil Immerman. Nondeterministic space is closed under complementation. *SIAM J. Comput.*, 17(5):935–938, 1988.

[41] Holger Karl and Andreas Willig. *Protocols and Architectures for Wireless Sensor Networks*. Wiley-Interscience, 2007.

[42] C. L. Liu. *Elements of Discrete Mathematics*. McGraw-Hill Inc.,US; 2 edition, 1985.

[43] C. L. Liu. *Computational Complexity: A Modern Approach*. Cambridge University Press; 1 edition, 2009.

[44] N. A. Lynch. *Distributed Algorithms.* Morgan Kaufmann; 1st edition, 1996.

[45] Othon Michail, Ioannis Chatzigiannakis, and Paul G. Spirakis. Mediated population protocols. *Theor. Comput. Sci.*, 2010. Submitted.

[46] Othon Michail, Ioannis Chatzigiannakis, and Paul G. Spirakis. *New Models for Population Protocols.* Synthesis Lectures on Distributed Computing Theory. Morgan & Claypool, 2010. Editor: Nancy Lynch. To appear.

[47] Christos H. Papadimitriou. *Computational complexity.* Addison-Wesley, 1994.

[48] M. Presburger. Über die vollständigkeit eines gewissen systems der arithmetik ganzer zahlen, in welchem die addition als einzige operation hervortritt. In *Comptes-Rendus du I Congrès de Mathématiciens des Pays Slaves*, pages 92–101, 1929.

[49] Walter J. Savitch. Relationships between nondeterministic and deterministic tape complexities. *J. Comput. Syst. Sci.*, 4(2):177–192, 1970.

[50] Arnold Schönhage. Universelle turing speicherung. In *Automatentheorie und Formale Sprachen.*

[51] Arnold Schönhage. Storage modification machines. *SIAM J. Comput.*, 9(3):490–508, 1980.

[52] Michael Sipser. *Introduction to the Theory of Computation, Second Edition, International Edition.* Thomson Course Technology, 2006.

[53] Richard Edwin Stearns, Juris Hartmanis, and Philip M. Lewis II. Hierarchies of memory limited computations. In *FOCS*, pages 179–190, 1965.

[54] Peter van Emde Boas. Space measures for storage modification machines. *Inf. Process. Lett.*, 30(2):103–110, 1989.

[55] J. von Neumann. Theory and organization of complicated automata. In A.W. Burks, editor, *Theory of Self-Reproducing Automata [by] John von Neumann*, pages 29–87 (Part One). University of Illinois Press, Urbana (1949), 1949. Based on transcripts of lectures delivered at the University of Illinois, in December 1949. Edited for publication by A.W. Burks.

[56] Brett Warneke, Kristofer S. J, and Smart Dust. Smart dust: Communicating with a cubic-millimeter computer. *Classical Papers on Computational Logic*, 1:372–383, 2001.

# Γλωσσάρι

**Βυζαντινός** Byzantine . 14

**Μηχανή Μετατροπής Αποθήκευσης** Storage Modification Machine . 16

**αιτιοκρατία** επίσης γνωστό ως (ε.γ.ω.) ντετερμινισμός, determinism . 23

**ακριβή χαρακτηρισμό** exact characterization . 14

**ανέχομαι** tolerate . 14

**ανεξάρτητη ένωση** disjoint union . 94

**ανταιτιοκρατία** ε.γ.ω. μη ντετερμινισμός, nondeterminism . 8

**αντιμετάθεση** permutation . 13

**αποκρινόμενος** responder . 7

**απομονωμένος** isolated . 32

**αρχή του περιστερώνα** pigeonhole principle . 113

**ασθενώς συνεκτικό** weakly connected . 9

**γράφημα γραμμή** line graph . 8

**γράφημα μεταβάσεων** transition graph . 10

**δυφίο** bit . 106

**εγκλεισμός** inclusion . 13

**επικαλυπτικό** spanning . 32

**εχθρικός δρομολογητής** adversary scheduler . 9

**ημιγραμμικό κατηγόρημα** semilinear predicate . 13

**ιδιότητα γραφήματος** graph property . 76

**κατευθυντός** directed . 8

**κατηγόρημα** predicate . 11

**κουπόνι** token . 118

**κυψελοειδές αυτόματο** cellular automaton . 6

**μεταβατική θήκη** transitive closure . 9

**μοναδικός προσδιοριστής** unique identifier . 11

**μονοσυμβολικός** unary . 129

**μυητής** initiator . 7

**παθητική κίνηση** passive mobility . 6

**πλειάδα** tuple . 102

**προδιαγραφή** specification . 11

**προσβάσιμος** reachable . 9

**πρότυπο κίνησης** mobility pattern . 6

**στήριγμα** support . 13

**σταθεροποιούμαι** stabilize . 11

**σταθμός βάσης** base station . 15

**συγκλίνω** converge . 11

**συνάρτηση μεταβάσεων** transition function . 7

**συναρμογή** concatenation . 103

**συντριπτική βλάβη** crash failures . 14

**σφιχτός** tight . 130

**σύμπαν γραφημάτων** graph universe . 8

**τόξο** arc . 33

**φάση** ε.γ.ω. διαμόρφωση, configuration . 8

# Συντομογραφίες

**2-κύκλος** κατευθυνόμενος κύκλος μήκους 2, 2-cycle. 76

**ΑΔΑ** Ασύρματα Δίκτυα Αισθητήρων. 5, 15

**ΠΑΛΟΜΑ** ΠΑθητικά κινούμενες ΛΟγαριθμικού χώρου ΜηχΑνές. 97, 98, 104, 107, 121, 132, 133

**ΠΚ** Πρωτόκολλο Κοινωνιών. 15, 99, 120–122, 124, 148

**ΠΜ** Παθητικά κινούμενες Μηχανές. 97–99, 104–107, 109, 110, 117, 120, 122, 126–128, 131–133, 136, 140–142, 144–148

**ΠΜΠ** Παθητικά κινούμενες Μηχανές με μοναδικούς Προσδιοριστές. 109, 110, 117, 118, 122

**ΠΠ** Πρωτόκολλο Πληθυσμών. 7, 9, 11–14, 18, 23–25, 27, 29, 41, 81, 98, 107, 130, 131, 140, 141, 147, 148

**ΠΠΔ** Πρωτόκολλο Πληθυσμών με Διαμεσολαβητή. 23–27, 29, 30, 41–43, 49, 61, 75, 76, 102, 124, 144–148

**ΠΠΔΔΓ** Πρωτόκολλο Πληθυσμών με Διαμεσολαβητή για Διάγνωση Γραφημάτων. 76–81, 84, 89, 91–93, 95, 96, 147

**ΣΠΠΔ** Συμμετρικό Πρωτόκολλο Πληθυσμών με Διαμεσολαβητή. 27, 29, 32, 33, 43, 45, 48, 58, 63, 75

**TM** μηχανή Turing. 18, 21, 23, 24, 32, 41–43, 48–51, 58, 61, 63, 70, 97–99, 102, 118, 122–124, 128, 130–132, 136, 145

**ανν** αν και μόνο αν. 10, 12, 14, 45, 48, 62, 77–79, 82, 87, 88, 120, 142

**δ.ό.** δείχνω ότι. 29, 32, 41–43, 45, 48, 60, 81, 117, 121, 122, 124, 129, 130

**ε.γ.ω.** επίσης γνωστό ως. 154, 155

**τ.ώ.** τέτοιος ώστε. 10, 12, 25, 26, 32, 33, 62, 89, 91, 92, 116, 133–135

**χ.β.τ.γ.** χωρίς βλάβη της γενικότητας. 11, 33, 38, 49, 92, 104

# Ευρετήριο